collana **SCHAUM**
teoria e problemi

TRASFORMATE DI LAPLACE

Murray R. SPIEGEL

450 problemi risolti

collana **SCHAUM**
teoria e problemi

TRASFORMATE DI LAPLACE

Murray R. SPIEGEL

ETAS LIBRI

Titolo originale: Laplace Transforms
Editore originale: McGraw-Hill Book Company, New York
Traduzione dall'inglese di Giuseppe Maj

ISBN 88-453-0025-0

Prima edizione italiana: aprile 1976

8 9 0 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Indice

Prefazione

La teoria delle trasformate di Laplace o della trasformazione di Laplace, detta anche calcolo operazionale, negli ultimi anni è diventata parte integrante ed essenziale del bagaglio matematico richiesto agli ingegneri, ai fisici, ai matematici e in genere a tutti gli uomini di scienza. Ciò, perché i metodi delle trasformate di Laplace, oltre a costituire di per se stessi materia di grande interesse teorico, forniscono strumenti facili ed efficaci per la risoluzione di molti problemi in vari campi della scienza e dell'ingegneria.

La teoria trae origine dai tentativi fatti per giustificare in termini rigorosi alcune "regole operazionali" usate da Heaviside nell'ultima metà del secolo scorso per risolvere equazioni della teoria elettromagnetica. Questi tentativi raggiunsero il loro pieno successo all'inizio del nostro secolo ad opera di Bromwich, Carson, Van der Pol e altri matematici che usarono la teoria delle variabili complesse.

Il presente volume è concepito come supplemento ai normali testi in circolazione o come testo base per un corso regolare sulla teoria delle trasformate di Laplace e le sue applicazioni. Esso può inoltre essere di grande aiuto a quanti frequentano corsi di matematica, fisica, ingegneria elettrotecnica, meccanica o in qualcuno dei numerosi altri campi in cui i metodi delle trasformate di Laplace trovano applicazione.

Ogni capitolo inizia con una esposizione chiara di definizioni, principi e teoremi unita a riferimenti illustrativi e ad altro materiale descrittivo. A ciò seguono dei gruppi di problemi risolti e supplementari selezionati per argomento e difficoltà. I problemi risolti servono ad illustrare ed ampliare la teoria, mettono a fuoco quei punti senza il padroneggiamento dei quali lo studente si muove sempre senza sicurezza e ribadiscono i principi basilari la cui assimilazione è essenziale per un effettivo apprendimento. Tra i problemi risolti sono incluse numerose dimostrazioni di teoremi e deduzioni di formule. Il gran numero di problemi supplementari con relativa risposta fornisce, capitolo per capitolo, una rassegna completa della materia.

I campi trattati comprendono le proprietà delle trasformate e delle antitrasformate di Laplace e le loro applicazioni nel settore delle equazioni differenziali ordinarie e a derivate parziali, delle equazioni integrali, delle equazioni alle differenze e dei problemi dei valori al contorno. La teoria che implica variabili complesse non è affrontata se non nella seconda metà del testo. Ciò allo scopo anzitutto di far comprendere ed apprezzare più profondamente al lettore la teoria e la potenza della formula di inversione complessa e in secondo luogo di venire incontro anche a chi vuole avere solo una introduzione all'argomento. I capitoli che trattano la teoria delle variabili complesse e delle serie e degli integrali di Fourier, che sono importanti nella discussione della formula di inversione complessa, sono stati introdotti a beneficio di quanti non hanno dimestichezza con questi argomenti.

Nel testo è stato incluso molto più di quanto rientra nella maggior parte dei primi corsi sull'argomento. Ciò allo scopo di rendere più flessibile il testo, di fornire un manuale di riferimento più utile e di stimolare un ulteriore interesse per l'argomento.

Colgo l'occasione per ringraziare la redazione della Schaum Publishing Company per la eccellente collaborazione prestatami.

M.R. Spiegel

Rensselaer Polytechnic Institute

CAPITOLO 1

Trasformata di Laplace

DEFINIZIONE DI TRASFORMATA DI LAPLACE

Sia $F(t)$ una funzione di t definita per $t > 0$. *La trasformata di Laplace* di $F(t)$, indicata con $\mathcal{L}\{F(t)\}$, è per definizione

$$\mathcal{L}\{F(t)\} \quad = \quad f(s) \quad = \quad \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \qquad (1)$$

dove per il momento si suppone che il parametro s sia reale. Più avanti vedremo che conviene assumere s come parametro complesso.

Si dice che la trasformata di Laplace di $F(t)$ *esiste* se esistono valori del parametro s per i quali l'integrale *(1) converge*; in caso contrario si dice che la trasformata non esiste. Le condizioni sufficienti per l'esistenza della trasformata di Laplace saranno definite a pag. 2.

SIMBOLI

Se una funzione di t è indicata con una lettera maiuscola, come $F(t)$, $G(t)$, $Y(t)$, ecc., la trasformata di Laplace di detta funzione è indicata con la corrispondente lettera minuscola, cioè $f(s)$, $g(s)$, $y(s)$, ecc. In altri casi invece si usa il tilde $(\sim)$ per indicare la trasformata di Laplace. Così ad es. la trasformata di Laplace di $u(t)$ si indica con $\tilde{u}(s)$.

TRASFORMATE DI LAPLACE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

La tabella a lato riporta le trasformate di Laplace di varie funzioni elementari. Per la loro deduzione in base alla definizione (1), v. problemi 1 e 2. Una tabella più ampia è riportata nell'appendice B, pagg. 245-254.

	$F(t)$	$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$
1.	1	$\frac{1}{s} \quad s > 0$
2.	t	$\frac{1}{s^2} \quad s > 0$
3.	t^n $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$ *Nota.* Fattoriale di $n = n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ Per definizione è anche $0! = 1$.
4.	e^{at}	$\frac{1}{s-a} \quad s > a$
5.	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2} \quad s > 0$
6.	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0$
7.	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2} \quad s > \lvert a\rvert$
8.	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2} \quad s > \lvert a\rvert$

FUNZIONI GENERALMENTE CONTINUE

Si dice che una funzione è *generalmente continua* in un intervallo $\alpha \leqq t \leqq \beta$ se è possibile dividere l'intervallo in un numero finito di intervalli in ognuno dei quali la funzione sia continua e abbia limiti destro e sinistro finiti.

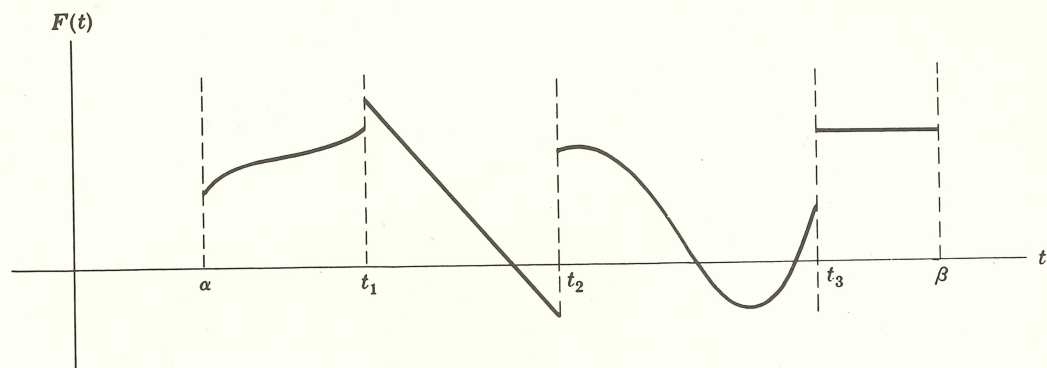



Fig. 1-1

In fig.1-1 è rappresentato graficamente un esempio di funzione generalmente continua. La funzione rappresentata presenta discontinuità in t_1, t_2 e t_3. Si noti che i limiti destro e sinistro in t_2, ad esempio, sono rappresentati rispettivamente da $\lim\limits_{\epsilon \to 0} F(t_2 + \epsilon) = F(t_2 + 0) = F(t_2+)$ e $\lim\limits_{\epsilon \to 0} F(t_2 - \epsilon) = F(t_2 - 0) = F(t_2-)$, dove ϵ è positivo.

FUNZIONI DI ORDINE ESPONENZIALE

Se esistono due costanti reali $M > 0$ e γ tali che per ogni $t > N$ sia

$$|e^{-\gamma t} F(t)| < M \qquad \text{o} \qquad |F(t)| < Me^{\gamma t}$$

si dice che $F(t)$ è una *funzione esponenziale di ordine* γ per $t \to \infty$ o, brevemente, che è una funzione di *ordine esponenziale.*

Esempio 1. $F(t) = t^2$ è, ad es., di ordine esponenziale 3, dato che $|t^2| = t^2 < e^{3t}$ per ogni $t > 0$.

Esempio 2. $F(t) = e^{t^3}$ non è di ordine esponenziale dato che $|e^{-\gamma t} e^{t^3}| = e^{t^3 - \gamma t}$ può essere resa maggiore di qualsiasi costante data aumentando t.

Intuitivamente, le funzioni di ordine esponenziale non possono crescere in valore assoluto più rapidamente di $Me^{\gamma t}$ al crescere di t. Praticamente non si tratta però di una restrizione perché M e γ possono essere presi grandi a piacere.

Tutte le funzioni limitate, come ad es. sin at o cos at, sono ovviamente di ordine esponenziale.

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER L'ESISTENZA DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE

Teorema 1-1. Se la funzione $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \leqq t \leqq N$ ed è di ordine esponenziale γ per $t > N$, allora la trasformata di Laplace $f(s)$ esiste per ogni $s > \gamma$.

Per la dimostrazione di questo teorema v. problema 47. Si noti che la condizione posta dal teorema 1-1 è condizione *sufficiente* a garantire l'esistenza della trasformata di Laplace. Se tale condizione non è soddisfatta, la trasformata di Laplace può però esistere o non esistere (v. problema 32). Ciò vale a dire che la condizione non è *necessaria* per l'esistenza della trasformata di Laplace.

Nel problema 145 sono indicate altre condizioni sufficienti.

ALCUNE IMPORTANTI PROPRIETA' DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE

Nel gruppo di teoremi riportati di seguito si assume, salvo indicazione esplicita in contrario, che tutte le funzioni soddisfino alle condizioni del *teorema 1-1*, il ché garantisce l'esistenza della corrispondente trasformata di Laplace.

1. **Proprietà della linearità.**

Teorema 1-2. Se c_1 e c_2 sono costanti qualsiasi mentre $F_1(t)$ e $F_2(t)$ sono funzioni le cui trasformate di Laplace sono rispettivamente $f_1(s)$ e $f_2(s)$, allora

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) \qquad (2)$$

Il teorema è facilmente estensibile al caso di più di due funzioni.

Esempio.
$$\mathcal{L}\{4t^2 - 3\cos 2t + 5e^{-t}\} = 4\mathcal{L}\{t^2\} - 3\mathcal{L}\{\cos 2t\} + 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}$$
$$= 4\left(\frac{2!}{s^3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + 5\left(\frac{1}{s+1}\right)$$
$$= \frac{8}{s^3} - \frac{3s}{s^2+4} + \frac{5}{s+1}$$

Il simbolo $\mathcal{L}$, che trasforma $F(t)$ in $f(s)$, è spesso indicato come *operatore trasformata di Laplace*. A causa della proprietà di $\mathcal{L}$ espressa da questo teorema si dice che $\mathcal{L}$ è un *operatore lineare* o che ha la *proprietà della linearità.*

2. **Prima proprietà della traslazione.**

Teorema 1-3. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ allora

$$\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a) \qquad (3)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$, si ha

$$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

3. **Seconda proprietà della traslazione.**

Teorema 1-4. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ e $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, allora

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s) \qquad (4)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{t^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$, la trasformata di Laplace della funzione

$$G(t) = \begin{cases} (t-2)^3 & t > 2 \\ 0 & t < 2 \end{cases}$$

è $6e^{-2s}/s^4$.

4. **Proprietà del cambio di scala.**

Teorema 1-5. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (5)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$, si ha

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(s/3)^2+1} = \frac{3}{s^2+9}$$

5. **Trasformata di Laplace delle derivate.**

Teorema 1-6. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) \qquad (6)$$

se $F(t)$ è continua per $0 \leqq t \leqq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F'(t)$ è generalmente continua per $0 \leqq t \leqq N$.

Esempio. Se $F(t) = \cos 3t$, allora $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s}{s^2+9}$ e si ha

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3\sin 3t\} = s\left(\frac{s}{s^2+9}\right) - 1 = \frac{-9}{s^2+9}$$

Questa proprietà serve per determinare le trasformate di Laplace senza ricorrere ad integrazioni (v. problema 15).

Teorema 1-7. Se nel *teorema 1-6*, $F(t)$ non è continua per $t = 0$ ma esiste il $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = F(0+)$ [che però non è eguale a $F(0)$ che può esistere o no], allora

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0+) \qquad (7)$$

Teorema 1-8. Se nel *teorema 1-6*, $F(t)$ non è continua per $t = a$, allora

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) - e^{-as}\{F(a+) - F(a-)\} \qquad (8)$$

dove $F(a+) - F(a-)$ è detto anche *salto* nel punto di discontinuità $t = a$. Se i punti di discontinuità sono più di uno, si possono fare gli ovvi adattamenti.

Teorema 1-9. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - s\,F(0) - F'(0) \qquad (9)$$

se $F(t)$ e $F'(t)$ sono continue per $0 \leqq t \leqq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F''(t)$ è generalmente continua per $0 \leqq t \leqq N$.

Se $F(t)$ e $F'(t)$ presentano punti di discontinuità, si possono apportare alla (*9*) correzioni analoghe a quelle dei *teoremi 1-7* e *1-8*.

Teorema 1-10. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$; allora

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots - s\,F^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \qquad (10)$$

se $F(t), F'(t), \ldots, F^{(n-1)}(t)$ sono continue per $0 \leqq t \leqq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$ mentre $F^{(n)}(t)$ è generalmente continua per $0 \leqq t \leqq N$.

6. **Trasformata di Laplace degli integrali.**

Teorema 1-11. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s} \qquad (11)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, si ha

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \sin 2u\,du\right\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

come si può verificare direttamente.

7. **Prodotto per t^n.**

Teorema 1-12. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s) \qquad (12)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \dfrac{1}{s-2}$, si ha

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2e^{2t}\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-2}\right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

8. **Divisione per t.**

Teorema 1-13. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\,du \qquad (13)$$

a condizione che il $\lim\limits_{t\to 0} F(t)/t$ esista.

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ e $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$, si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1}(1/s)$$

9. **Funzioni periodiche.**

Teorema 1-14. Sia $F(t)$ una funzione periodica di periodo T per cui sia $F(t+T) = F(t)$ (v. fig. 1-2). In tal caso

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\displaystyle\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt}{1 - e^{-sT}} \qquad (14)$$

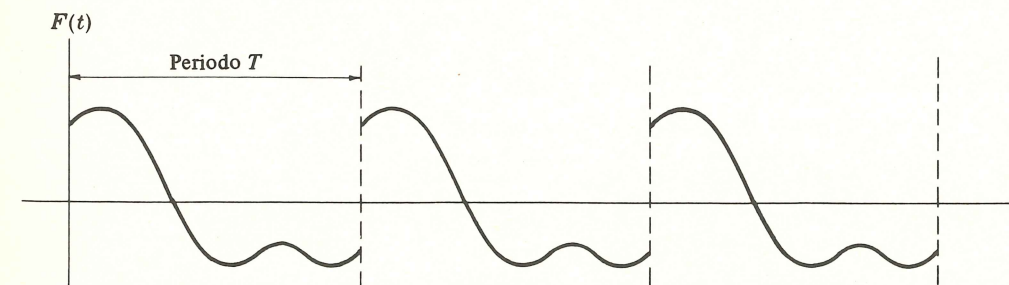



Fig. 1-2

10. **Comportamento di $f(s)$ per $s \to \infty$.**

Teorema 1-15. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0 \qquad (15)$$

11. **Teorema del valore iniziale.**

Teorema 1-16. Se i limiti indicati esistono, si ha

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) \qquad (16)$$

12. **Teorema del valore finale.**

Teorema 1-17. Se i limiti indicati esistono, si ha

$$\lim_{t \to \infty} F(t) = \lim_{s \to 0} s\,f(s) \qquad (17)$$

13. **Generalizzazione del teorema del valore iniziale.**

Se $\lim_{t \to 0} F(t)/G(t) = 1$, si dice che per valori di t prossimi a $t = 0$ (per t piccolo), $F(t)$ è *prossimo a* $G(t)$ e si scrive $F(t) \sim G(t)$ per $t \to 0$.

Analogamente se $\lim_{s \to \infty} f(s)/g(s) = 1$, si dice che per valori elevati di s, $f(s)$ è *prossima a* $g(s)$ e si scrive $f(s) \sim g(s)$ per $s \to \infty$.

Adottando questi simboli si ottiene la seguente generalizzazione del *teorema 1-16.*

Teorema 1-18. Se $F(t) \sim G(t)$ per $t \to 0$, allora $f(s) \sim g(s)$ per $s \to \infty$ dove $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ e $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$.

14. **Generalizzazione del teorema del valore finale.**

Se $\lim_{t \to \infty} F(t)/G(t) = 1$, si scrive $F(t) \sim G(t)$ per $t \to \infty$. Analogamente se $\lim_{s \to 0} f(s)/g(s) = 1$, si scrive $f(s) \sim g(s)$ per $s \to 0$. Si ha allora la seguente generalizzazione del *teorema 1-17.*

Teorema 1-19. Se $F(t) \sim G(t)$ per $t \to \infty$, allora $f(s) \sim g(s)$ per $s \to 0$ dove $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$ e $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$.

METODI PER DETERMINARE LE TRASFORMATE DI LAPLACE

Per la determinazione delle trasformate di Laplace sono stati elaborati vari metodi, riportati in questo elenco.

1. **Metodo diretto.** Esso implica l'impiego diretto della definizione (*1*).

2. **Metodo delle serie.** Se $F(t)$ ammette uno sviluppo in serie di potenze dato da

$$F(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \qquad (18)$$

la sua trasformata di Laplace può essere determinata come somma delle trasformate di Laplace dei singoli termini della serie. Per cui

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!\,a_2}{s^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,a_n}{s^{n+1}} \qquad (19)$$

Perché il risultato sia valido, deve verificarsi la condizione che la serie (*19*) converga per $s > \gamma$ (v. problemi 34, 36, 39 e 48).

3. **Metodo delle equazioni differenziali.** Esso consiste nel trovare un'equazione differenziale di cui $F(t)$ sia soluzione e nell'applicare quindi i teoremi sopra enunciati (v. problemi 34 e 48).

4. **Derivazione rispetto ad un parametro.** (v. problema 20).

5. **Metodi vari** implicanti artifizi particolari basati sui teoremi sopra enunciati, per es. il *teorema 1-13.*

6. **Uso delle tabelle** (v. appendice).

CALCOLO DI INTEGRALI

Se $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, allora

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\, dt = f(s) \qquad (20)$$

Prendendo il limite per $s \to 0$, si ha

$$\int_0^{\infty} F(t)\, dt = f(0) \qquad (21)$$

assumendo che l'integrale sia convergente.

Le formule (*20*) e (*21*) sono spesso utili nel calcolo di vari integrali (v. problemi 45 e 46).

ALCUNE FUNZIONI PARTICOLARI

I. **La funzione gamma.**

Se $n > 0$, per *funzione gamma* si intende

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1} e^{-u}\, du \qquad (22)$$

Le seguenti sono alcune importanti proprietà della funzione gamma.

1. $$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n), \quad n > 0$$

Quindi dato che $\Gamma(1) = 1$, si ha $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2! = 2$, $\Gamma(4) = 3!$ e in generale $\Gamma(n+1) = n!$, se n è un numero intero positivo. Per tale motivo la funzione gamma è detta anche *funzione fattoriale.*

2. $$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

3. $$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

4. Per valori elevati di n,

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

[In questo caso $\sim$ sta per "circa eguale a per valori elevati di n". Più esattamente si scrive $F(n) \sim G(n)$ se $\lim_{n \to \infty} F(n)/G(n) = 1$.]. Questa formula è detta *formula di Stirling.*

5. Per $n < 0$ si può definire $\Gamma(n)$ come

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

II. **Funzioni di Bessel.**

Si definisce *funzione di Bessel di ordine n* la

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots \right\} \qquad (23)$$

Alcune importanti proprietà di tali funzioni sono

1. $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ se n è un numero intero positivo.

2. $J_{n+1}(t) = \dfrac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$.

3. $\dfrac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$. Se $n = 0$, si ha $J_0'(t) = -J_1(t)$.

4. $e^{\frac{1}{2}t(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$.

Quest'ultima è detta *funzione generatrice* delle funzioni di Bessel.

5. $J_n(t)$ soddisfa all'*equazione differenziale di Bessel*

$$t^2 Y''(t) + t\,Y'(t) + (t^2 - n^2)\,Y(t) = 0$$

Conviene porre $J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$ dove $I_n(t)$ è detta *funzione modificata di Bessel di ordine n.*

III. **La funzione degli errori** è definita come

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}\,du \tag{24}$$

IV. **La funzione complementare degli errori** è definita come

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2}du \tag{25}$$

V. **Le funzioni seno e coseno integrali** sono definite come

$$\operatorname{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du \tag{26}$$

$$\operatorname{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du \tag{27}$$

VI. **La funzione integralesponenziale** è definita come

$$\operatorname{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du \tag{28}$$

VII. **La funzione a scalino unitario**, detta anche *funzione unitaria di Heaviside*, è definita come

$$\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases} \tag{29}$$

v. fig. 1-3.

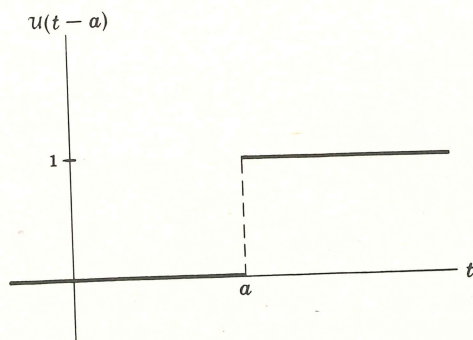



Fig. 1-3

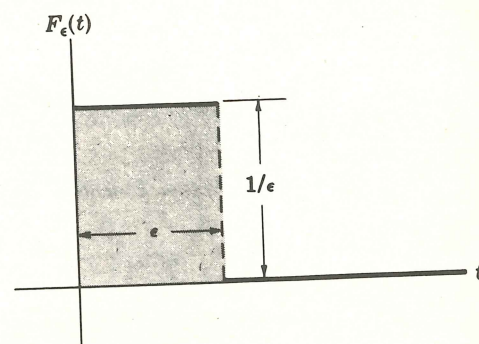



Fig. 1-4

VIII. **La funzione impulsiva unitaria o funzione delta di Dirac.**

Si consideri la funzione

$$F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases} \tag{30}$$

dove $\epsilon > 0$, la cui rappresentazione grafica è data in fig. 1-4.

E' geometricamente evidente che quando $\epsilon \to 0$ l'altezza della regione rettangolare ombreggiata cresce indefinitamente mentre la larghezza diminuisce in modo tale che l'area della regione è sempre eguale a 1, cioè $\int_0^\infty F_\epsilon(t)\,dt = 1$.

Ciò ha portato alcuni fisici e ingegneri a immaginare una funzione limite, indicata con $\delta(t)$, cui tenderebbe $F_\epsilon(t)$ quando $\epsilon \to 0$. Questa funzione limite è stata chiamata *funzione impulsiva unitaria* o *funzione delta di Dirac.* Alcune delle proprietà di cui essa gode sono

1. $\int_0^\infty \delta(t)\,dt = 1$

2. $\int_0^\infty \delta(t)\,G(t)\,dt = G(0)$ per $G(t)$ funzione continua qualsiasi.

3. $\int_0^\infty \delta(t-a)\,G(t)\,dt = G(a)$ per $G(t)$ funzione continua qualsiasi.

Benchè matematicamente parlando una funzione del genere non abbia senso, le manipolazioni o operazioni compiute col suo impiego possono essere rese rigorose.

IX. **Funzioni nulle.** Se $\mathcal{N}(t)$ è una funzione di t tale per cui per tutti i valori di $t > 0$ si ha

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)\,du = 0 \tag{31}$$

si dice che $\mathcal{N}(t)$ è una *funzione nulla.*

Esempio. La funzione $F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1/2 \\ -1 & t = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ è una funzione nulla.

In generale, ogni funzione che abbia valore zero in tutti i punti salvo un insieme numerabile di essi (cioè salvo un insieme di punti che può essere messo in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali 1, 2, 3, . . .) è una funzione nulla.

TRASFORMATE DI LAPLACE DI FUNZIONI PARTICOLARI

Nella tabella sono riportate le trasformate di Laplace di varie funzioni particolari. Per una tabella più estesa v. appendice B, pag. 245.

Tabella delle trasformate di Laplace di funzioni particolari

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
1.	t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ Notare che se $n = 0, 1, 2, \ldots$ ciò si riduce al caso 3 della tabella di pag. 1.
2.	$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
3.	$J_n(at)$	$\frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{a^n\sqrt{s^2+a^2}}$
4.	$\sin\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\,e^{-1/4s}$
5.	$\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}\,e^{-1/4s}$

Tabella delle trasformate di Laplace di funzioni particolari (cont.)

	$F(t)$	$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$
6.	$\operatorname{erf}(t)$	$\dfrac{e^{s^2/4}}{s}\operatorname{erfc}(s/2)$
7.	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}$
8.	$\operatorname{Si}(t)$	$\dfrac{1}{s}\tan^{-1}\dfrac{1}{s}$
9.	$\operatorname{Ci}(t)$	$\dfrac{\ln(s^2+1)}{2s}$
10.	$\operatorname{Ei}(t)$	$\dfrac{\ln(s+1)}{s}$
11.	$\mathcal{U}(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
12.	$\delta(t)$	1
13.	$\delta(t-a)$	e^{-as}
14.	$\mathcal{N}(t)$	0

PROBLEMI RISOLTI

TRASFORMATE DI LAPLACE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

1. Dimostrare che (a) $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s},\ s>0$; (b) $\mathcal{L}\{t\} = \dfrac{1}{s^2},\ s>0$; (c) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a},\ s>a$.

(a)
$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}(1)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-sP}}{s} = \frac{1}{s} \quad \text{se } s>0$$

(b)
$$\mathcal{L}\{t\} = \int_0^\infty e^{-st}(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P t\,e^{-st}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.(t)\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right) - (1)\left(\frac{e^{-st}}{s^2}\right)\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sP}}{s^2} - \frac{Pe^{-sP}}{s}\right)$$
$$= \frac{1}{s^2} \quad \text{se } s>0$$

dove si è fatto uso dell'integrazione per parti.

(c)
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}(e^{at})\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-(s-a)t}\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^P = \lim_{P\to\infty}\frac{1-e^{-(s-a)P}}{s-a} = \frac{1}{s-a} \quad \text{se } s>a$$

Per metodi che non seguono la via dell'integrazione diretta v. problema 15.

2. Dimostrare che (a) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, (b) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ se $s>0$.

(a)
$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\sin at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\sin at - a\cos at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{a}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\sin aP + a\cos aP)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \frac{a}{s^2+a^2} \quad \text{se } s>0$$

(b)
$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\cos at\,dt$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}(-s\cos at + a\sin at)}{s^2+a^2}\right|_0^P$$
$$= \lim_{P\to\infty}\left\{\frac{s}{s^2+a^2} - \frac{e^{-sP}(s\cos aP - a\sin aP)}{s^2+a^2}\right\}$$
$$= \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{se } s>0$$

Nella dimostrazione si è fatto uso delle formule

$$\int e^{\alpha t}\sin\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\sin\beta t - \beta\cos\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \qquad (1)$$
$$\int e^{\alpha t}\cos\beta t\,dt = \frac{e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t + \beta\sin\beta t)}{\alpha^2+\beta^2} \qquad (2)$$

Altro procedimento. Assumendo che il risultato del problema 1(*c*) vale anche per numeri complessi (il che può essere dimostrato), si ha

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{s-ia} = \frac{s+ia}{s^2+a^2} \qquad (3)$$

Ma $e^{iat} = \cos at + i\sin at$. Perciò

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \int_0^\infty e^{-st}(\cos at + i\sin at) \qquad (4)$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}\sin at\,dt = \mathcal{L}\{\cos at\} + i\,\mathcal{L}\{\sin at\}$$

Dalle (*3*) e (*4*), eguagliando le parti reali e le parti immaginarie fra loro, si ha

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}, \qquad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

3. Dimostrare che (*a*) $\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2-a^2}$, (*b*) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$ se $s > |a|$.

(*a*)
$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-st}e^{-at}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{per } s > |a|$$

Altro procedimento. Usando la proprietà della linearità della trasformazione di Laplace, si ha immediatamente

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{a}{s^2-a^2} \quad \text{per } s > |a|$$

(*b*) Come per la parte (*a*),

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right\} = \frac{s}{s^2-a^2} \quad \text{per } s > |a|$$

4. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ se $F(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$.

Per definizione,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^3 e^{-st}(5)\,dt + \int_3^\infty e^{-st}(0)\,dt$$
$$= 5\int_0^3 e^{-st}\,dt = 5\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^3 = \frac{5(1-e^{-3s})}{s}$$

LA PROPRIETA' DELLA LINEARITA'

5. Dimostrare la *proprietà della linearità* (*teorema 1-2*, pag. 3).

Sia $\mathcal{L}\{F_1(t)\} = f_1(s) = \int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt$ e $\mathcal{L}\{F_2(t)\} = f_2(s) = \int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt$. Allora se c_1 e c_2 sono costanti qualsiasi,

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\}\,dt$$
$$= c_1\int_0^\infty e^{-st}F_1(t)\,dt + c_2\int_0^\infty e^{-st}F_2(t)\,dt$$
$$= c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\}$$
$$= c_1f_1(s) + c_2f_2(s)$$

Il risultato ottenuto può essere facilmente generalizzato (v. problema 61).

6. Determinare $\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\}$.

Per la proprietà della linearità (problema 5) si ha

$$\mathcal{L}\{4e^{5t} + 6t^3 - 3\sin 4t + 2\cos 2t\} = 4\mathcal{L}\{e^{5t}\} + 6\mathcal{L}\{t^3\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\} + 2\mathcal{L}\{\cos 2t\}$$
$$= 4\left(\frac{1}{s-5}\right) + 6\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+4}\right)$$
$$= \frac{4}{s-5} + \frac{36}{s^4} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2s}{s^2+4}$$

dove $s > 5$.

TRASLAZIONE E CAMBIO DI SCALA

7. Dimostrare la *prima proprietà della traslazione:* Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$.

Si ha
$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$$

Allora
$$\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt = f(s-a)$$

8. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\}$, (*d*) $\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\}$.

(*a*) $\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$. Allora $\mathcal{L}\{t^2e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$.

(*b*) $\mathcal{L}\{\sin 4t\} = \frac{4}{s^2+16}$. Allora $\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin 4t\} = \frac{4}{(s+2)^2+16} = \frac{4}{s^2+4s+20}$.

(*c*) $\mathcal{L}\{\cosh 5t\} = \frac{s}{s^2-25}$. Allora $\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} = \frac{s-4}{(s-4)^2-25} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}$.

Altro procedimento.

$$\mathcal{L}\{e^{4t}\cosh 5t\} = \mathcal{L}\left\{e^{4t}\left(\frac{e^{5t}+e^{-5t}}{2}\right)\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{9t}+e^{-t}\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-9} + \frac{1}{s+1}\right\} = \frac{s-4}{s^2-8s-9}$$

(*d*) $\mathcal{L}\{3\cos 6t - 5\sin 6t\} = 3\mathcal{L}\{\cos 6t\} - 5\mathcal{L}\{\sin 6t\}$
$$= 3\left(\frac{s}{s^2+36}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right) = \frac{3s-30}{s^2+36}$$

Allora
$$\mathcal{L}\{e^{-2t}(3\cos 6t - 5\sin 6t)\} = \frac{3(s+2)-30}{(s+2)^2+36} = \frac{3s-24}{s^2+4s+40}$$

9. Dimostrare la *seconda proprietà della traslazione:*

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ e $G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$, allora $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} G(t)\, dt = \int_0^a e^{-st} G(t)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} G(t)\, dt \\ &= \int_0^a e^{-st}(0)\, dt + \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st} F(t-a)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+a)} F(u)\, du \\ &= e^{-as} \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du \\ &= e^{-as} f(s) \end{aligned}$$

dove si è usata la sostituzione $t = u + a$.

10. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ se $F(t) = \begin{cases} \cos(t - 2\pi/3) & t > 2\pi/3 \\ 0 & t < 2\pi/3 \end{cases}$

Procedimento 1.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^{2\pi/3} e^{-st}(0)\, dt + \int_{2\pi/3}^\infty e^{-st} \cos(t - 2\pi/3)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u+2\pi/3)} \cos u\, du \\ &= e^{-2\pi s/3} \int_0^\infty e^{-su} \cos u\, du = \frac{s e^{-2\pi s/3}}{s^2+1} \end{aligned}$$

Procedimento 2. Dato che $\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2+1}$, dal problema 9, con $a = 2\pi/3$, ne segue che

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{s e^{-2\pi s/3}}{s^2+1}$$

11. Dimostrare la *proprietà del cambio di scala:* Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora $\mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(at)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(at)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(u/a)} F(u)\, d(u/a) \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{-su/a} F(u)\, du \\ &= \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \end{aligned}$$

dove si è usata la trasformazione $t = u/a$.

12. Posto $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}(1/s)$, determinare $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}$.

Per il problema 11,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{at}\right\} = \frac{1}{a} \mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\{1/(s/a)\} = \frac{1}{a} \tan^{-1}(a/s)$$

Allora $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \tan^{-1}(a/s)$.

TRASFORMATA DI LAPLACE DELLE DERIVATE

13. Dimostrare il *teorema 1-6.* Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s f(s) - F(0)$.

Usando l'integrazione per parti, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F'(t)\, dt = \lim_{P\to\infty} \int_0^P e^{-st} F'(t)\, dt \\ &= \lim_{P\to\infty} \left\{ e^{-st} F(t) \Big|_0^P + s \int_0^P e^{-st} F(t)\, dt \right\} \\ &= \lim_{P\to\infty} \left\{ e^{-sP} F(P) - F(0) + s \int_0^P e^{-st} F(t)\, dt \right\} \\ &= s \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt - F(0) \\ &= s f(s) - F(0) \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $F(t)$ è di ordine esponenziale γ per $t \to \infty$, per cui $\lim_{P\to\infty} e^{-sP} F(P) = 0$ per $s > \gamma$.

Per i casi in cui $F(t)$ non è continua in $t = 0$, v. problema 68.

14. Dimostrare il *teorema 1-9*, pag. 4: Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ allora $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$.

Per il problema 13, $\mathcal{L}\{G'(t)\} = s \mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s g(s) - G(0)$.

Sia $G(t) = F'(t)$. Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F''(t)\} &= s \mathcal{L}\{F'(t)\} - F'(0) \\ &= s[s \mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)] - F'(0) \\ &= s^2 \mathcal{L}\{F(t)\} - s F(0) - F'(0) \\ &= s^2 f(s) - s F(0) - F'(0) \end{aligned}$$

La generalizzazione alle derivate di ordine superiore può essere dimostrata usando il metodo dell'induzione matematica (v. problema 65).

15. Usare il *teorema 1-6*, pag. 4, per determinare ognuna delle seguenti trasformate di Laplace:

(*a*) $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$, (*c*) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$.

Il *teorema 1-6* afferma che, verificandosi le opportune condizioni enunciate a pag. 4,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = s \mathcal{L}\{F(t)\} - F(0) \qquad (1)$$

(*a*) Sia $F(t) = 1$. Allora $F'(t) = 0$, $F(0) = 1$, e la (*1*) diventa

$$\mathcal{L}\{0\} = 0 = s\mathcal{L}\{1\} - 1 \quad \text{o} \quad \mathcal{L}\{1\} = 1/s \tag{2}$$

(*b*) Sia $F(t) = t$. Allora $F'(t) = 1$, $F(0) = 0$, e la (*1*), usando la parte (*a*),diventa

$$\mathcal{L}\{1\} = 1/s = s\mathcal{L}\{t\} - 0 \quad \text{o} \quad \mathcal{L}\{t\} = 1/s^2 \tag{3}$$

Usando il metodo dell'induzione matematica si può parimenti dimostrare che $\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}$ per ogni numero intero positivo n.

(*c*) Sia $F(t) = e^{at}$. Allora $F'(t) = ae^{at}$, $F(0) = 1$, e la (*1*) diventa

$$\mathcal{L}\{ae^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1, \quad \text{cioè} \quad a\mathcal{L}\{e^{at}\} = s\mathcal{L}\{e^{at}\} - 1 \quad \text{o} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$$

16. Usare il *teorema 1-9* per dimostrare che $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$.

Sia $F(t) = \sin at$. Allora $F'(t) = a\cos at$, $F''(t) = -a^2 \sin at$, $F(0) = 0$, $F'(0) = a$. Per cui dalla formula

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$$

si ha
$$\mathcal{L}\{-a^2 \sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - s(0) - a$$

cioè
$$-a^2\mathcal{L}\{\sin at\} = s^2\mathcal{L}\{\sin at\} - a$$

o
$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

TRASFORMATA DI LAPLACE DEGLI INTEGRALI

17. Dimostrare il *teorema 1-11:* Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora $\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = f(s)/s$.

Sia $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$. Allora $G'(t) = F(t)$ e $G(0) = 0$. Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati, si ha

$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

Quindi
$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \quad \text{o} \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,du\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

18. Determinare $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\}$.

Dall'esempio che segue l'enunciazione del *teorema 1-13* a pag. 5 si ha,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Quindi per il problema 17,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

PRODOTTO PER POTENZE DI t

19. Dimostrare il *teorema 1-12*, pag. 5:

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ dove $n = 1, 2, 3, \ldots$

Si ha
$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt$$

Allora per la regola di Leibniz per la derivazione sotto segno di integrale,

$$\begin{aligned}\frac{df}{ds} = f'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} e^{-st} F(t)\,dt \\ &= \int_0^\infty -te^{-st}F(t)\,dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-st}\{tF(t)\}\,dt \\ &= -\mathcal{L}\{tF(t)\}\end{aligned}$$

Quindi
$$\mathcal{L}\{tF(t)\} = -\frac{df}{ds} = -f'(s) \tag{1}$$

il che dimostra il teorema per $n = 1$.

Per la dimostrazione generale del problema, si usa la *induzione matematica*. Si assuma che il teorema sia valido per $n = k$, si assuma cioè che

$$\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k)}(s) \tag{2}$$

Allora

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}\{t^k F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

o, per la regola di Leibniz,

$$-\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1}F(t)\}\,dt = (-1)^k f^{(k+1)}(s)$$

cioè

$$\int_0^\infty e^{-st}\{t^{k+1}F(t)\}\,dt = (-1)^{k+1} f^{(k+1)}(s) \tag{3}$$

Ne segue che *se* la (*2*) è vera, cioè se il teorema vale per $n = k$, è vera anche la (*3*), cioè il teorema vale anche per $n = k + 1$. Ma per la (*1*) il teorema è sicuramente valido per $n = 1$. Perciò esso è valido anche per $n = 1 + 1 = 2$, per $n = 2 + 1 = 3$, ecc. e quindi per tutti i valori interi positivi di n.

A voler essere rigorosi, bisognerebbe dimostrare che la regola di Leibniz può essere applicata in questo caso. Per questa dimostrazione v. problema 166.

20. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{t \sin at\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^2 \cos at\}$.

(*a*) Dato che $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, per il problema 19 si ha

$$\mathcal{L}\{t\sin at\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Altro procedimento.

Dato che $\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \frac{s}{s^2+a^2}$

Derivando rispetto al parametro a (usando la regola di Leibniz) si ha,

$$\frac{d}{da}\int_0^\infty e^{-st}\cos at\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\{-t\sin at\}\, dt = -\mathcal{L}\{t\sin at\}$$

$$= \frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = -\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

da cui

$$\mathcal{L}\{t\sin at\} = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Notare che la formula ottenuta equivale a $\frac{d}{da}\mathcal{L}\{\cos at\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{da}\cos at\right\}$.

(*b*) Dato che $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$, per il problema 19 si ha

$$\mathcal{L}\{t^2\cos at\} = \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{2s^3-6a^2s}{(s^2+a^2)^3}$$

Si può anche seguire il secondo procedimento usato nella parte (*a*) scrivendo

$$\mathcal{L}\{t^2\cos at\} = \mathcal{L}\left\{-\frac{d^2}{da^2}(\cos at)\right\} = -\frac{d^2}{da^2}\mathcal{L}\{\cos at\}$$

con il che si arriva allo stesso risultato.

DIVISIONE PER t

21. Dimostrare il *teorema 1-13*, pag. 5: Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ allora $\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\, du.$

Sia $G(t) = \frac{F(t)}{t}$. Allora $F(t) = t\,G(t)$. Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati e usando il problema 19, si ha

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{G(t)\} \quad \text{o} \quad f(s) = -\frac{dg}{ds}$$

Integrando quindi per parti si ha

$$g(s) = -\int_\infty^s f(u)\, du = \int_s^\infty f(u)\, du \qquad (1)$$

cioè

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)\, du$$

Notare che nella (*1*) si è scelto la "costante di integrazione" in modo che $\lim_{s\to\infty} g(s) = 0$ (v. *teorema 1-15*, pag. 5).

22. (*a*) Dimostrare che $\int_0^\infty \frac{F(t)}{t}\, dt = \int_0^\infty f(u)\, du$ a condizione che l'integrale converga.

(*b*) Dimostrare che $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

(*a*) Dal problema 21,

$$\int_0^\infty e^{-st}\frac{F(t)}{t}\, dt = \int_s^\infty f(u)\, du$$

Quindi prendendo il limite per $s \to 0+$, supponendo che l'integrale converga, si ottiene la formula cercata.

(*b*) Sia $F(t) = \sin t$ in modo che nella parte (*a*) sia $f(s) = 1/(s^2+1)$. Allora

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \tan^{-1} u\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

FUNZIONI PERIODICHE

23. Dimostrare il *teorema 1-14*, pag. 5: Se $F(t)$ è una funzione periodica di periodo $T > 0$ allora

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st}F(t)\, dt}{1-e^{-sT}}$$

Si ha

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\, dt$$

$$= \int_0^T e^{-st}F(t)\, dt + \int_T^{2T} e^{-st}F(t)\, dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st}F(t)\, dt + \cdots$$

Sia nel secondo integrale $t = u + T$, nel terzo $t = u + 2T$, ecc. Allora

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^T e^{-su}F(u)\, du + \int_0^T e^{-s(u+T)}F(u+T)\, du + \int_0^T e^{-s(u+2T)}F(u+2T)\, du + \cdots$$

$$= \int_0^T e^{-su}F(u)\, du + e^{-sT}\int_0^T e^{-su}F(u)\, du + e^{-2sT}\int_0^T e^{-su}F(u)\, du + \cdots$$

$$= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \cdots)\int_0^T e^{-su}F(u)\, du$$

$$= \frac{\int_0^T e^{-su}F(u)\, du}{1-e^{-sT}}$$

dove si è fatto uso della periodicità della funzione per porre $F(u+T) = F(u)$, $F(u+2T) = F(u), \ldots$, e del fatto che

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}, \quad |r| < 1$$

24. (*a*) Tracciare il diagramma della funzione

$$F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

considerata periodica con periodo 2π.

(*b*) Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

(*a*) Il diagramma è quello riportato in fig. 1-5.

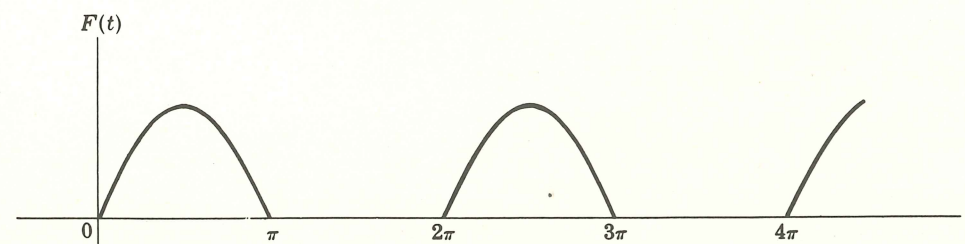



Fig. 1-5

(*b*) Per il problema 23, dato che $T = 2\pi$, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{2\pi} e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} e^{-st}\sin t\,dt \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{e^{-st}(-s\sin t-\cos t)}{s^2+1}\right\}\Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\left\{\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\} = \frac{1}{(1-e^{-\pi s})(s^2+1)}\end{aligned}$$

sfruttando l'integrale (*1*) del problema 2, pag. 11.

Il diagramma della funzione $F(t)$ è detto anche curva della *sinusoide raddrizzata a una alternanza.*

TEOREMI DEI VALORI INIZIALI E FINALI

25. Dimostrare il *teorema del valore iniziale:* $\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} s\,f(s)$.

Per il problema 13,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0) \qquad (1)$$

Ma se $F'(t)$ è generalmente continua e di ordine esponenziale, si ha

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = 0 \qquad (2)$$

Prendendo quindi nella (*1*) il limite per $s\to\infty$, supponendo che $F(t)$ sia continua per $t = 0$, si ha che

$$0 = \lim_{s\to\infty} s\,f(s) - F(0) \qquad \text{o} \qquad \lim_{s\to\infty} s\,f(s) = F(0) = \lim_{t\to 0} F(t)$$

Se invece $F(t)$ non è continua per $t = 0$, il teorema resta ancora valido ma per la dimostrazione occorre usare il *teorema 1-7*, pag. 4.

26. Dimostrare il *teorema del valore finale:* $\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$.

Per il problema 13,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt = s\,f(s) - F(0)$$

Il limite sinistro per $s\to 0$ è

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 0}\int_0^\infty e^{-st}F'(t)\,dt &= \int_0^\infty F'(t)\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P F'(t)\,dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\{F(P)-F(0)\} = \lim_{t\to\infty} F(t) - F(0)\end{aligned}$$

Il limite destro per $s\to 0$ è

$$\lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

Quindi

$$\lim_{t\to\infty} F(t) - F(0) = \lim_{s\to 0} s\,f(s) - F(0)$$

o, come richiesto,

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} s\,f(s)$$

Se $F(t)$ non è continua, il teorema vale ancora, ma per la dimostrazione occorre usare il *teorema 1-7*, pag. 4.

27. Illustrare i problemi 25 e 26 riferendosi alla funzione $F(t) = 3e^{-2t}$.

Si ha $\quad F(t) = 3e^{-2t},\ f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{3}{s+2}$.

Per il teorema del valore iniziale (problema 25),

$$\lim_{t\to 0} 3e^{-2t} = \lim_{s\to\infty}\frac{3s}{s+2}$$

ovvero $3 = 3$, il che verifica il teorema.

Per il teorema del valore finale (problema 26),

$$\lim_{t\to\infty} 3e^{-2t} = \lim_{s\to 0}\frac{3s}{s+2}$$

ovvero $0 = 0$, il che verifica il teorema.

LA FUNZIONE GAMMA

28. Dimostrare che: (*a*) $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n),\ n > 0$; (*b*) $\Gamma(n+1) = n!,\ n = 1,2,3,\ldots$.

$$\begin{aligned}(a)\quad \Gamma(n+1) &= \int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}\int_0^P u^n e^{-u}\,du \\ &= \lim_{P\to\infty}\left\{(u^n)(-e^{-u})\Big|_0^P - \int_0^P(-e^{-u})(nu^{n-1})\,du\right\} \\ &= \lim_{P\to\infty}\left\{-P^n e^{-P} + n\int_0^P u^{n-1}e^{-u}\,du\right\} \\ &= n\int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}\,du = n\,\Gamma(n) \qquad \text{se } n > 0\end{aligned}$$

$$(b)\quad \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-u}\,du = \lim_{P\to\infty}(1-e^{-P}) = 1.$$

Porre $n = 1,2,3,\ldots$ nella $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$. Allora

$$\Gamma(2) = 1\,\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\,\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!, \quad \Gamma(4) = 3\,\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3!$$

In generale, $\Gamma(n+1) = n!$ se n è un numero intero positivo.

29. Dimostrare che: $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Sia $I_P = \displaystyle\int_0^P e^{-x^2}\,dx = \int_0^P e^{-y^2}\,dy$ e $\displaystyle\lim_{P\to\infty} I_P = I$ il valore richiesto dell'integrale.

Allora

$$\begin{aligned}I_P^2 &= \left(\int_0^P e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^P e^{-y^2}\,dy\right) \\ &= \int_0^P\int_0^P e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \\ &= \iint_{\mathcal{R}_P} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\end{aligned}$$

dove $\mathcal{R}_P$ è il quadrato $OACE$ di lato P (v. fig. 1-6).

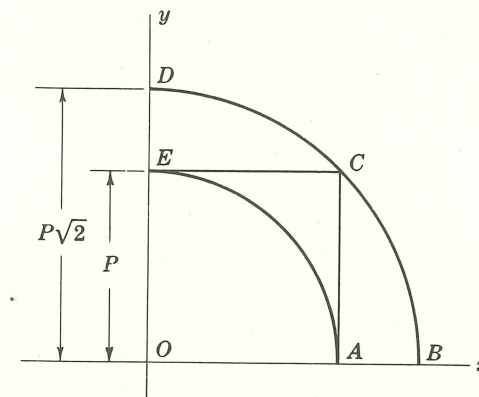



Fig. 1-6

Dato che l'integrando è positivo, si ha

$$\iint_{\mathcal{R}_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \quad \leq \quad I_P^2 \quad \leq \quad \iint_{\mathcal{R}_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \tag{1}$$

dove $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ sono le regioni del primo quadrante delimitate dai cerchi rispettivamente di raggio P e $P\sqrt{2}$.

Usando le coordinate polari (r, θ) dalla (*1*) si ha,

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \quad \leq \quad I_P^2 \quad \leq \quad \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{P\sqrt{2}} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \tag{2}$$

o

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-P^2}) \quad \leq \quad I_P^2 \quad \leq \quad \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2P^2}) \tag{3}$$

Prendendo quindi nella (*3*) il limite per $P \to \infty$ si ha $\lim\limits_{P\to\infty} I_P^2 = I^2 = \pi/4$ e $I = \sqrt{\pi}/2$.

30. Dimostrare che: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u}\,du$. Posto $u = v^2$, questo integrale usando il problema 29 diventa

$$2\int_0^\infty e^{-v^2}\,dv \quad = \quad 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \quad = \quad \sqrt{\pi}$$

31. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ se $n > -1$, $s > 0$.

$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty e^{-st}\,t^n\,dt$. Posto $st = u$, supponendo $s > 0$, l'integrale diventa

$$\mathcal{L}\{t^n\} \quad = \quad \int_0^\infty e^{-u}\left(\frac{u}{s}\right)^n d\left(\frac{u}{s}\right) \quad = \quad \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du \quad = \quad \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$$

32. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}$, $s > 0$.

Sia $n = -1/2$ nel problema 31. Allora

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} \quad = \quad \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} \quad = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \quad = \quad \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

Notare che benchè $F(t) = t^{-1/2}$ non soddisfi alle condizioni sufficienti del *teorema 1-1*, pag. 2, la sua trasformata di Laplace esiste lo stesso. La funzione soddisfa invece alle condizioni enunciate nel problema 145.

33. Supponendo che la relazione $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ valga per tutti i valori di n, determinare:
(*a*) $\Gamma(-\frac{1}{2})$, (*b*) $\Gamma(-\frac{3}{2})$, (*c*) $\Gamma(-\frac{5}{2})$, (*d*) $\Gamma(0)$, (*e*) $\Gamma(-1)$, (*f*) $\Gamma(-2)$.

(*a*) Posto $n = -\frac{1}{2}$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$. Allora $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$.

(*b*) Posto $n = -\frac{3}{2}$, $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}\Gamma(-\frac{3}{2})$. Allora $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = (2)(\frac{2}{3})\sqrt{\pi} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$ per la parte (*a*).

(*c*) Posto $n = -\frac{5}{2}$, $\Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}\Gamma(-\frac{5}{2})$. Allora $\Gamma(-\frac{5}{2}) = -\frac{2}{5}\Gamma(-\frac{3}{2}) = -(2)(\frac{2}{3})(\frac{2}{5})\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$ per la parte (*b*).

(*d*) Posto $n = 0$, $\Gamma(1) = 0 \cdot \Gamma(0)$ e ne deriva che $\Gamma(0)$ deve essere infinita, dato che $\Gamma(1) = 1$.

(*e*) Posto $n = -1$, $\Gamma(0) = -1\,\Gamma(-1)$ e ne deriva che $\Gamma(-1)$ deve essere infinita.

(*f*) Posto $n = -2$, $\Gamma(-1) = -2\,\Gamma(-2)$ e ne deriva che $\Gamma(-2)$ deve essere infinita.

In generale se p è un qualsiasi numero intero positivo o zero, $\Gamma(-p)$ è infinita e (v. problema 170)

$$\Gamma(-p - \tfrac{1}{2}) \quad = \quad (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

FUNZIONI DI BESSEL

34. (*a*) Determinare $\mathcal{L}\{J_0(t)\}$ dove $J_0(t)$ è la funzione di Bessel di ordine zero.
(*b*) Usare il risultato di (*a*) per determinare $\mathcal{L}\{J_0(at)\}$.

(*a*) **Procedimento 1**, *usando le serie*. Posto $n = 0$ nella equazione (*23*), pag. 7, si ha

$$J_0(t) \quad = \quad 1 - \frac{t^2}{2^2} + \frac{t^4}{2^2\,4^2} - \frac{t^6}{2^2\,4^2\,6^2} + \cdots$$

Allora

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} \quad = \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{2^2}\frac{2!}{s^3} + \frac{1}{2^2\,4^2}\frac{4!}{s^5} - \frac{1}{2^2\,4^2\,6^2}\frac{6!}{s^7} + \cdots$$

$$= \quad \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2}\right) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{s^4}\right) - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{1}{s^6}\right) + \cdots\right\}$$

$$= \quad \frac{1}{s}\left\{\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}\right\} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

dove si è fatto uso del teorema binomiale (v. problema 172).

Procedimento 2, *usando le equazioni differenziali*. La funzione $J_0(t)$ soddisfa all'equazione differenziale

$$t\,J_0''(t) + J_0'(t) + t\,J_0(t) \quad = \quad 0 \tag{1}$$

(v. proprietà 5, pag. 8, con $n = 0$). Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati della (*1*) e usando i *teoremi 1-6* e *1-9*, pag. 4, e il *teorema 1-12*, pag. 5, assieme alle formule $J_0(0) = 1$, $J_0'(0) = 0$, $y = \mathcal{L}\{J_0(t)\}$, si ha

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - s(1) - 0\} + \{sy - 1\} - \frac{dy}{ds} \quad = \quad 0$$

da cui

$$\frac{dy}{ds} \quad = \quad -\frac{sy}{s^2+1}$$

Quindi

$$\frac{dy}{y} \quad = \quad -\frac{s\,ds}{s^2+1}$$

e per integrazione

$$y \quad = \quad \frac{c}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ora $\lim\limits_{s\to\infty} s\,y(s) = \dfrac{cs}{\sqrt{s^2+1}} = c$ e $\lim\limits_{t\to 0} J_0(t) = 1$. Quindi per il teorema del valore iniziale (pag. 5), si ha $c = 1$ e quindi $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = 1/\sqrt{s^2+1}$.

Per un altro procedimento, v. problema 165.

(*b*) Per il problema 11,

$$\mathcal{L}\{J_0(at)\} \quad = \quad \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{(s/a)^2+1}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$$

35. Determinare $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$, dove $J_1(t)$ è la funzione di Bessel di ordine 1.

Dalla proprietà 3 delle funzioni di Bessel, pag. 7, si ha che $J_0'(t) = -J_1(t)$. Per cui

$$\mathcal{L}\{J_1(t)\} = -\mathcal{L}\{J_0'(t)\} = -[s\,\mathcal{L}\{J_0(t)\} - 1]$$
$$= 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$$

I metodi delle serie e delle equazioni differenziali sono anch'essi applicabili a questo caso (v. problema 178, pag. 41).

LE FUNZIONI SENO E COSENO INTEGRALI E INTEGRALESPONENZIALE

36. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{\mathrm{Si}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$.

Procedimento 1. Sia $F(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du$. Allora $F(0) = 0$ e $F'(t) = \frac{\sin t}{t}$ o $t\,F'(t) = \sin t$.

Prendendo la trasformata di Laplace,

$$\mathcal{L}\{t\,F'(t)\} = \mathcal{L}\{\sin t\} \quad \text{o} \quad -\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

cioè
$$\frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{-1}{s^2+1}$$

Integrando
$$s\,f(s) = -\tan^{-1}s + c$$

Per il teorema del valore iniziale, $\lim_{s\to\infty} s\,f(s) = \lim_{t\to 0} F(t) = F(0) = 0$ per cui $c = \pi/2$. Quindi

$$s\,f(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \tan^{-1}\frac{1}{s} \quad \text{o} \quad f(s) = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Procedimento 2. V. problema 18.

Procedimento 3. Usando le serie, si ha

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^t \frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \frac{u^7}{7!} + \cdots\right)du$$
$$= t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots$$

Allora
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\right\} = \mathcal{L}\left\{t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{s^4} + \frac{1}{5\cdot 5!}\cdot\frac{5!}{s^6} - \frac{1}{7\cdot 7!}\cdot\frac{7!}{s^8} + \cdots$$
$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3s^4} + \frac{1}{5s^6} - \frac{1}{7s^8} + \cdots$$
$$= \frac{1}{s}\left\{\frac{(1/s)}{1} - \frac{(1/s)^3}{3} + \frac{(1/s)^5}{5} - \frac{(1/s)^7}{7} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

dove si è fatto uso della serie $\tan^{-1}x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$, $|x| < 1$.

Procedimento 4. Posto $u = tv$,

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du = \int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv$$

Allora
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,du\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv\right\}$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^1 \frac{\sin tv}{v}\,dv\right\}dt$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{v}\left\{\int_0^\infty e^{-st}\sin tv\,dt\right\}dv$$
$$= \int_0^1 \frac{\mathcal{L}\{\sin tv\}}{v}\,dv = \int_0^1 \frac{dv}{s^2+v^2}$$
$$= \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{v}{s}\Big|_0^1 = \frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}$$

dove si è supposto che sia lecito cambiare l'ordine di integrazione.

37. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du\right\} = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$.

Si adotta il principio del procedimento 1 del problema 36.

Sia $F(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$ per cui $F'(t) = -\frac{\cos t}{t}$ e $t\,F'(t) = -\cos t$. Prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{-s}{s^2+1} \quad \text{o} \quad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{s}{s^2+1}$$

Allora per integrazione, $s\,f(s) = \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + c$

Per il teorema del valore finale, $\lim_{s\to 0} s\,f(s) = \lim_{t\to\infty} F(t) = 0$ per cui $c = 0$. Quindi

$$s\,f(s) = \tfrac{1}{2}\ln(s^2+1) \quad \text{o} \quad f(s) = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}$$

Si può usare anche il procedimento 4 del problema 36 (v. problema 153).

38. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{\mathrm{Ei}(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right\} = \frac{\ln(s+1)}{s}$.

Sia $F(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du$. Allora $t\,F'(t) = -e^{-t}$. Prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$-\frac{d}{ds}\{s\,f(s) - F(0)\} = \frac{-1}{s+1} \quad \text{o} \quad \frac{d}{ds}\{s\,f(s)\} = \frac{1}{s+1}$$

Integrando, $s\,f(s) = \ln(s+1) + c$

Applicando il teorema del valore finale come nel problema 37, si ha $c = 0$ e quindi

$$f(s) = \frac{\ln(s+1)}{s}.$$

Per un altro procedimento simile al procedimento 4 del problema 36, v. problema 153.

LA FUNZIONE DEGLI ERRORI

39. Dimostrare che: $\mathcal{L}\{\text{erf}\sqrt{t}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du\right\} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$.

Usando le serie, si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}du\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}}\left(1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots\right)du\right\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3} + \frac{t^{5/2}}{5\cdot 2!} - \frac{t^{7/2}}{7\cdot 3!} + \cdots\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5\cdot 2!\, s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7\cdot 3!\, s^{9/2}} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^{5/2}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^{7/2}} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^{9/2}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{s^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{s^3} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{s^{3/2}}\left(1 + \frac{1}{s}\right)^{-1/2} = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

dove si è fatto uso del teorema binomiale (v. problema 172).

Per un altro procedimento, v. problema 175(*a*).

FUNZIONI IMPULSIVE. LA FUNZIONE DELTA DI DIRAC.

40. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$ dove $\mathcal{U}(t-a)$ è la funzione a scalino unitario di Heaviside.

Si ha $\mathcal{U}(t-a) = \begin{cases} 1 & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$. Allora

$$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}(1)\,dt$$

$$= \lim_{P\to\infty}\int_a^P e^{-st}\,dt = \lim_{P\to\infty}\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^P$$

$$= \lim_{P\to\infty}\frac{e^{-as} - e^{-sP}}{s} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Altro procedimento.

Dato che $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, per il problema 9 si ha $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$.

41. Determinare $\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\}$ dove $F_\epsilon(t)$è definita dalla (*30*), pag. 8.

Si ha $F_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon & 0 \leqq t \leqq \epsilon \\ 0 & t > \epsilon \end{cases}$. Allora

$$\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F_\epsilon(t)\,dt$$

$$= \int_0^\epsilon e^{-st}(1/\epsilon)\,dt + \int_\epsilon^\infty e^{-st}(0)\,dt$$

$$= \frac{1}{\epsilon}\int_0^\epsilon e^{-st}\,dt = \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{\epsilon s}$$

42. (*a*) Dimostrare che nel problema 41 $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{L}\{F_\epsilon(t)\} = 1$.

(*b*) Il risultato ottenuto in (*a*) è lo stesso di $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to 0}F_\epsilon(t)\right\}$? Spiegare.

(*a*) La dimostrazione è immediata dato che

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1 - (1 - s\epsilon + s^2\epsilon^2/2! - \cdots)}{s\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\left(1 - \frac{s\epsilon}{2!} + \cdots\right) = 1$$

Allo stesso risultato si può arrivare anche usando la regola di L'Hospital.

(*b*) Matematicamente parlando, il $\lim_{\epsilon\to 0}F_\epsilon(t)$ non esiste, per cui la $\mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to 0}F_\epsilon(t)\right\}$ non è definita. Tuttavia risulta utile considerare che $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0}F_\epsilon(t)$ sia tale che $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$. $\delta(t)$ è detta *funzione delta di Dirac* o *funzione impulso.*

43. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$, dove $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac.

Ciò segue dal problema 9 e dal fatto che $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

44. Indicare quali delle seguenti funzioni sono funzioni nulle.

(*a*) $F(t) = \begin{cases} 1 & t = 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, (*b*) $F(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leqq t \leqq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$, (*c*) $F(t) = \delta(t)$.

(*a*) $F(t)$ è una funzione nulla dato che $\int_0^t F(u)\,du = 0$ per ogni $t > 0$.

(*b*) Se $t < 1$, si ha $\int_0^t F(u)\,du = 0$.

Se $1 \leqq t \leqq 2$, si ha $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^t (1)\,du = t - 1$.

Se $t > 2$, si ha $\int_0^t F(u)\,du = \int_1^2 (1)\,du = 1$.

Dato che $\int_0^t F(u)\,du \neq 0$ per ogni $t > 0$, $F(t)$ non è una funzione nulla.

(*c*) Dato che $\int_0^t \delta(u)\,du = 1$ per ogni $t > 0$, $\delta(t)$ non è una funzione nulla.

CALCOLO DI INTEGRALI

45. Calcolare (*a*) $\int_0^\infty t\,e^{-2t}\cos t\,dt$, (*b*) $\int_0^\infty \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\,dt$.

(*a*) Per il problema 19,

$$\mathcal{L}\{t\cos t\} = \int_0^\infty t\,e^{-st}\cos t\,dt$$

$$= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

Quindi posto $s = 2$, si ha $\int_0^\infty te^{-2t}\cos t\, dt = \frac{3}{25}$.

(*b*) Se $F(t) = e^{-t} - e^{-3t}$, allora $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}$. Quindi per il problema 21,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right\} = \int_s^\infty \left\{\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u+3}\right\} du$$

o

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right) dt = \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right)$$

Prendendo il limite per $s \to 0+$, si ha $\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\, dt = \ln 3$.

46. Dimostrare che (*a*) $\int_0^\infty J_0(t)\, dt = 1$, (*b*) $\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\, dt = \sqrt{2}/2$.

(*a*) Per il problema 34,
$$\int_0^\infty e^{-st}J_0(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Quindi per $s \to 0+$ si ha $\int_0^\infty J_0(t)\, dt = 1$.

(*b*) Per il problema 39,
$$\int_0^\infty e^{-st}\operatorname{erf}\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

Quindi per $s \to 1$, si ha $\int_0^\infty e^{-t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\, dt = \sqrt{2}/2$.

PROBLEMI VARI

47. Dimostrare il *teorema 1-1*, pag. 2.

Per N intero positivo qualsiasi si ha

$$\int_0^\infty e^{-st}F(t)\, dt = \int_0^N e^{-st}F(t)\, dt + \int_N^\infty e^{-st}F(t)\, dt$$

Dato che $F(t)$ è generalmente continua in ogni intervallo limitato $0 \leqq t \leqq N$, il primo integrale del termine di destra esiste. Anche il secondo esiste, dato che $F(t)$ è di ordine esponenziale γ per $t > N$. Per confermare ciò basta osservare che in tal caso

$$\left|\int_N^\infty e^{-st}F(t)\, dt\right| \leqq \int_N^\infty |e^{-st}F(t)|\, dt$$
$$\leqq \int_0^\infty e^{-st}|F(t)|\, dt$$
$$\leqq \int_0^\infty e^{-st}Me^{\gamma t}\, dt = \frac{M}{s-\gamma}$$

Quindi per $s > \gamma$ la trasformata di Laplace esiste.

48. Determinare $\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\}$.

Procedimento 1, *usando le serie.*

$$\sin\sqrt{t} = \sqrt{t} - \frac{(\sqrt{t})^3}{3!} + \frac{(\sqrt{t})^5}{5!} - \frac{(\sqrt{t})^7}{7!} + \cdots = t^{1/2} - \frac{t^{3/2}}{3!} + \frac{t^{5/2}}{5!} - \frac{t^{7/2}}{7!} + \cdots$$

Quindi la trasformata di Laplace è

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\Gamma(3/2)}{s^{3/2}} - \frac{\Gamma(5/2)}{3!\,s^{5/2}} + \frac{\Gamma(7/2)}{5!\,s^{7/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{7!\,s^{9/2}} + \cdots$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2 s}\right) + \frac{(1/2^2 s)^2}{2!} - \frac{(1/2^2 s)^3}{3!} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/2^2 s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

Procedimento 2, *usando le equazioni differenziali.*

Sia $Y(t) = \sin\sqrt{t}$. Allora differenziando due volte si ha

$$4tY'' + 2Y' + Y = 0$$

Prendendo la trasformata di Laplace, si ha se $y = \mathcal{L}\{Y(t)\}$

$$-4\frac{d}{ds}\{s^2 y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + 2\{s\,y - Y(0)\} + y = 0$$

o

$$4\,s^2 y' + (6\,s - 1)y = 0$$

Risolvendo,
$$y = \frac{c}{s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

Per valori piccoli di t si ha $\sin\sqrt{t} \sim \sqrt{t}$ e $\mathcal{L}\{\sqrt{t}\} = \sqrt{\pi}/2s^{3/2}$. Per valori elevati di s, $y \sim c/s^{3/2}$. Per confronto ne segue che $c = \sqrt{\pi}/2$. Quindi

$$\mathcal{L}\{\sin\sqrt{t}\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{3/2}}e^{-1/4s}$$

49. Determinare $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$.

Sia $F(t) = \sin\sqrt{t}$. Allora $F'(t) = \frac{\cos\sqrt{t}}{2\sqrt{t}}$, $F(0) = 0$. Di conseguenza per il problema 48,

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = s\,f(s) - F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,s^{1/2}}e^{-1/4s}$$

da cui

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}e^{-1/4s}$$

Si può arrivare allo stesso risultato anche usando il metodo delle serie [v. problema 175(*b*)].

50. Dimostrare che

$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

dove $\gamma = 0{,}5772156\ldots$ è la *costante di Eulero.*

Si ha
$$\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1}e^{-u}\, du$$

Allora derivando rispetto a r si ha

$$\Gamma'(r) = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u} \ln u \, du$$

da cui

$$\Gamma'(1) = \int_0^\infty e^{-u} \ln u \, du$$

Posto $u = st$, $s > 0$, questa diventa

$$\Gamma'(1) = s \int_0^\infty e^{-st} (\ln s + \ln t) \, dt$$

Da ciò

$$\mathcal{L}\{\ln t\} = \int_0^\infty e^{-st} \ln t \, dt = \frac{\Gamma'(1)}{s} - \ln s \int_0^\infty e^{-st} \, dt$$

$$= \frac{\Gamma'(1)}{s} - \frac{\ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

Altro procedimento. Per $k > -1$, si ha

$$\int_0^\infty e^{-st} t^k \, dt = \frac{\Gamma(k+1)}{s^{k+1}}$$

Allora derivando rispetto a k,

$$\int_0^\infty e^{-st} t^k \ln t \, dt = \frac{\Gamma'(k+1) - \Gamma(k+1) \ln s}{s^{k+1}}$$

Posto $k = 0$ si ha, come richiesto,

$$\int_0^\infty e^{-st} \ln t \, dt = \mathcal{L}\{\ln t\} = \frac{\Gamma'(1) - \ln s}{s} = -\frac{\gamma + \ln s}{s}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

TRASFORMATE DI LAPLACE DI FUNZIONI ELEMENTARI

51. Determinare le trasformate di Laplace di ognuna delle seguenti funzioni. In ogni caso indicare i valori di s per i quali esiste la trasformata di Laplace.

		Risp.	
(*a*)	$2e^{4t}$	(*a*) $2/(s-4)$,	$s > 4$
(*b*)	$3e^{-2t}$	(*b*) $3/(s+2)$,	$s > -2$
(*c*)	$5t - 3$	(*c*) $(5-3s)/s^2$,	$s > 0$
(*d*)	$2t^2 - e^{-t}$	(*d*) $(4+4s-s^3)/s^3(s+1)$,	$s > 0$
(*e*)	$3 \cos 5t$	(*e*) $3s/(s^2+25)$,	$s > 0$
(*f*)	$10 \sin 6t$	(*f*) $60/(s^2+36)$,	$s > 0$
(*g*)	$6 \sin 2t - 5 \cos 2t$	(*g*) $(12-5s)/(s^2+4)$,	$s > 0$
(*h*)	$(t^2+1)^2$	(*h*) $(s^4+4s^2+24)/s^5$,	$s > 0$
(*i*)	$(\sin t - \cos t)^2$	(*i*) $(s^2-2s+4)/s(s^2+4)$,	$s > 0$
(*j*)	$3 \cosh 5t - 4 \sinh 5t$	(*j*) $(3s-20)/(s^2-25)$,	$s > 5$

52. Calcolare (*a*) $\mathcal{L}\{(5e^{2t}-3)^2\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{4\cos^2 2t\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{25}{s-4} - \dfrac{30}{s-2} + \dfrac{9}{s}$, $s > 4$ (*b*) $\dfrac{2}{s} + \dfrac{2s}{s^2+16}$, $s > 0$

53. Determinare $\mathcal{L}\{\cosh^2 4t\}$. *Risp.* $\dfrac{s^2-32}{s(s^2-64)}$

54. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ se (*a*) $F(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ 4 & t > 2 \end{cases}$, (*b*) $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leq t \leq 5 \\ 1 & t > 5 \end{cases}$

Risp. (*a*) $4e^{-2s}/s$ (*b*) $\dfrac{2}{s^2}(1-e^{-5s}) - \dfrac{9}{s}e^{-5s}$

55. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

56. Verificare se esiste o meno la trasformata di Laplace di ognuna delle seguenti funzioni.

(*a*) $1/(t+1)$, (*b*) e^{t^2-t}, (*c*) $\cos t^2$ *Risp.* (*a*) esiste, (*b*) non esiste, (*c*) esiste.

LINEARITA', TRASLAZIONE E CAMBIO DI SCALA

57. Determinare $\mathcal{L}\{3t^4 - 2t^3 + 4e^{-3t} - 2\sin 5t + 3\cos 2t\}$.

Risp. $\dfrac{72}{s^5} - \dfrac{12}{s^4} + \dfrac{4}{s+3} - \dfrac{10}{s^2+25} + \dfrac{3s}{s^2+4}$

58. Calcolare ognuna delle seguenti trasformate.

		Risp.
(*a*)	$\mathcal{L}\{t^3 e^{-3t}\}$	(*a*) $6/(s+3)^4$
(*b*)	$\mathcal{L}\{e^{-t}\cos 2t\}$	(*b*) $(s+1)/(s^2+2s+5)$
(*c*)	$\mathcal{L}\{2e^{3t}\sin 4t\}$	(*c*) $8/(s^2-6s+25)$
(*d*)	$\mathcal{L}\{(t+2)^2 e^t\}$	(*d*) $(4s^2-4s+2)/(s-1)^3$
(*e*)	$\mathcal{L}\{e^{2t}(3\sin 4t - 4\cos 4t)\}$	(*e*) $(20-4s)/(s^2-4s+20)$
(*f*)	$\mathcal{L}\{e^{-4t}\cosh 2t\}$	(*f*) $(s+4)/(s^2+8s+12)$
(*g*)	$\mathcal{L}\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\}$	(*g*) $(1-5s)/(s^2+2s-3)$

59. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin^2 t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{(1+te^{-t})^3\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{2}{(s+1)(s^2+2s+5)}$ (*b*) $\dfrac{1}{s} + \dfrac{3}{(s+1)^2} + \dfrac{6}{(s+2)^3} + \dfrac{6}{(s+3)^4}$

60. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ se $F(t) = \begin{cases} (t-1)^2 & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$. *Risp.* $2e^{-s}/s^3$

61. Se $F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t)$ hanno come trasformate di Laplace rispettivamente $f_1(s), f_2(s), \ldots, f_n(s)$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sono costanti qualsiasi, dimostrare che

$$\mathcal{L}\{c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + \cdots + c_n F_n(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + \cdots + c_n f_n(s)$$

62. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{s^2 - s + 1}{(2s+1)^2(s-1)}$, determinare $\mathcal{L}\{F(2t)\}$. *Risp.* $(s^2 - 2s + 4)/4(s+1)^2(s-2)$

63. Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{e^{-1/s}}{s}$, determinare $\mathcal{L}\{e^{-t}F(3t)\}$. *Risp.* $\dfrac{e^{-3/(s+1)}}{s+1}$

64. Se $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, dimostrare che per $r > 0$, $\mathcal{L}\{r^t F(at)\} = \dfrac{1}{s - \ln r} f\left(\dfrac{s - \ln r}{a}\right)$

TRASFORMATA DI LAPLACE DELLE DERIVATE

65. (*a*) Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, dimostrare che

$$\mathcal{L}\{F'''(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - s F'(0) - F''(0)$$

definendo le condizioni opportune cui deve soddisfare $F(t)$.

(*b*) Generalizzare il risultato di (*a*) e dimostrarlo usando il metodo della induzione matematica.

66. Posto $F(t) = \begin{cases} 2t & 0 \leqq t \leqq 1 \\ t & t > 1 \end{cases}$. (*a*) Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$. (*b*) Determinare $\mathcal{L}\{F'(t)\}$. (*c*) Vale in questo caso la relazione $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)$? Spiegare.

Risp. (*a*) $\dfrac{2}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s^2}$, (*b*) $\dfrac{2}{s} - \dfrac{e^{-s}}{s}$

67. (*a*) Se $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t \leqq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, determinare $\mathcal{L}\{F''(t)\}$.

(*b*) Vale in questo caso la relazione $\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{F(t)\} - sF(0) - F'(0)$? Spiegare.

Risp. (*a*) $2(1 - e^{-s})/s$

68. Dimostrare: (*a*) il *teorema 1-7*, pag. 4; (*b*) il *teorema 1-8*, pag. 4.

TRASFORMATE DI LAPLACE DEGLI INTEGRALI

69. Verificare direttamente che $\mathcal{L}\left\{\int_0^t (u^2 - u + e^{-u})\, du\right\} = \dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{t^2 - t + e^{-t}\}$.

70. Se $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, dimostrare che $\mathcal{L}\left\{\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} F(u)\, du\right\} = \dfrac{f(s)}{s^2}$.

(L'integrale doppio è indicato più brevemente anche con il simbolo $\int_0^t \int_0^t F(t)\, dt^2$.)

71. Generalizzare il risultato del problema 70.

72. Dimostrare che $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \dfrac{1 - e^{-u}}{u}\, du\right\} = \dfrac{1}{s}\ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right)$.

73. Dimostrare che $\displaystyle\int_{t=0}^{\infty} \int_{u=0}^{t} \frac{e^{-t}\sin u}{u}\, du\, dt = \frac{\pi}{4}$.

PRODOTTO PER POTENZE DI t

74. Dimostrare che (*a*) $\mathcal{L}\{t\cos at\} = \dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$

(*b*) $\mathcal{L}\{t\sin at\} = \dfrac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$

75. Determinare $\mathcal{L}\{t(3\sin 2t - 2\cos 2t)\}$. *Risp.* $\dfrac{8 + 12s - 2s^2}{(s^2+4)^2}$

76. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t^2 \sin t\} = \dfrac{6s^2 - 2}{(s^2+1)^3}$.

77. Calcolare (*a*) $\mathcal{L}\{t\cosh 3t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\sinh 2t\}$. *Risp.* (*a*) $(s^2+9)/(s^2-9)^2$, (*b*) $4s/(s^2-4)^2$

78. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{t^2\cos t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{(t^2 - 3t + 2)\sin 3t\}$.

Risp. (*a*) $(2s^3 - 6s)/(s^2+1)^3$, (*b*) $\dfrac{6s^4 - 18s^3 + 126s^2 - 162s + 432}{(s^2+9)^3}$

79. Determinare $\mathcal{L}\{t^3\cos t\}$. *Risp.* $\dfrac{6s^4 - 36s^2 + 6}{(s^2+1)^4}$

80. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} t\, e^{-3t}\sin t\, dt = \frac{3}{50}$.

DIVISIONE PER t

81. Dimostrare che $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\right\} = \ln\left(\dfrac{s+b}{s+a}\right)$.

82. Dimostrare che $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right)$.

83. Determinare $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sinh t}{t}\right\}$. *Risp.* $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)$

84. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t} - e^{-6t}}{t}\, dt = \ln 2$.

[*Suggerimento*: usare il problema 81.]

85. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos 6t - \cos 4t}{t}\, dt$. *Risp.* $\ln(3/2)$

86. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}$.

FUNZIONI PERIODICHE

87. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ dove $F(t)$ è la funzione periodica rappresentata graficamente in fig. 1-7.

Risp. $\dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{s}{2}$

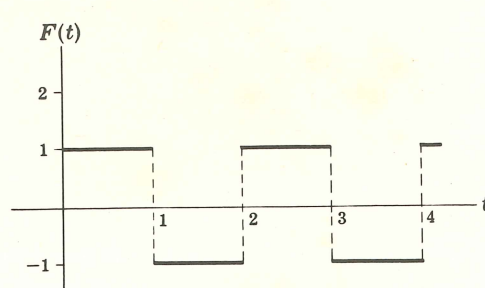



Fig. 1-7

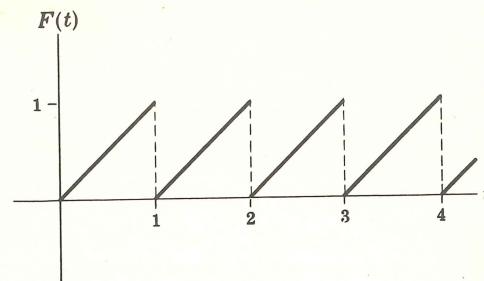



Fig. 1-8

88. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ dove $F(t)$ è la funzione periodica rappresentata graficamente in fig. 1-8.

Risp. $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$

89. Sia $F(t) = \begin{cases} 3t & 0 < t < 2 \\ 6 & 2 < t < 4 \end{cases}$ dove $F(t)$ ha periodo 4. (*a*) Rappresentare graficamente $F(t)$. (*b*) Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Risp. (*b*) $\dfrac{3 - 3e^{-2s} - 6se^{-4s}}{s^2(1-e^{-4s})}$

90. Se $F(t) = t^2$, $0 < t < 2$ e $F(t+2) = F(t)$, determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Risp. $\dfrac{2 - 2e^{-2s} - 4se^{-2s} - 4s^2e^{-2s}}{s^3(1-e^{-2s})}$

91. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ dove $F(t) = \begin{cases} t & 0 < t < 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases}$ e $F(t+2) = F(t)$ per $t > 0$.

Risp. $\dfrac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2(1-e^{-2s})}$

92. (*a*) Dimostrare che la funzione $F(t)$ il cui diagramma è l'onda triangolare di fig. 1-9 ha come trasformata di Laplace $\dfrac{1}{s^2}\tanh\dfrac{s}{2}$.
(*b*) Come si può ottenere il risultato della parte (*a*) dal problema 87? Spiegare.

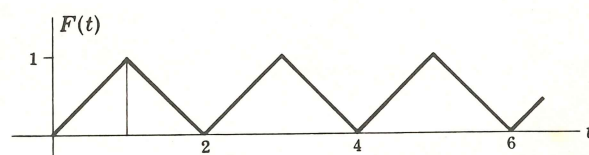



Fig. 1-9

TEOREMI DEI VALORI INIZIALI E FINALI

93. Verificare il teorema del valore iniziale per le funzioni (*a*) $3 - 2\cos t$, (*b*) $(2t+3)^2$, (*c*) $t + \sin 3t$.

94. Verificare il teorema del valore finale per le funzioni (*a*) $1 + e^{-t}(\sin t + \cos t)$, (*b*) $t^3 e^{-2t}$.

95. Discutere l'applicabilità del teorema del valore finale alla funzione $\cos t$.

96. Se $F(t) \sim ct^p$ per $t \to 0$ dove $p > -1$, dimostrare che $f(s) \sim c\,\Gamma(p+1)/s^{p+1}$ per $s \to \infty$.

97. Se $F(t) \sim ct^p$ per $t \to \infty$ dove $p > -1$, dimostrare che $f(s) \sim c\,\Gamma(p+1)/s^{p+1}$ per $s \to \infty$.

LA FUNZIONE GAMMA

98. Calcolare (*a*) $\Gamma(5)$, (*b*) $\dfrac{\Gamma(3)\,\Gamma(4)}{\Gamma(7)}$, (*c*) $\Gamma(5/2)$, (*d*) $\dfrac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(4)}{\Gamma(11/2)}$.

Risp. (*a*) 24, (*b*) 1/60, (*c*) $3\sqrt{\pi}/4$, (*d*) 32/315

99. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{t^{1/2} + t^{-1/2}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{-1/3}\}$, (*c*) $\mathcal{L}\{(1+\sqrt{t})^4\}$.

Risp. (*a*) $(2s+1)\sqrt{\pi}/2s^{3/2}$, (*b*) $\Gamma(2/3)/s^{2/3}$, (*c*) $(s^2 + 2\sqrt{\pi}\,s^{3/2} + 6s + 3\sqrt{\pi}\,s^{1/2} + 2)/s^3$

100. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{t}}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^{7/2}e^{3t}\}$.

Risp. (*a*) $\sqrt{\pi/(s+2)}$, (*b*) $105\sqrt{\pi}/16(s-3)^{9/2}$

FUNZIONI DI BESSEL

101. Dimostrare che $\mathcal{L}\{e^{-at}J_0(bt)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2 - 2as + a^2 + b^2}}$.

102. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t\,J_0(at)\} = \dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$.

103. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-3t}J_0(4t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\,J_0(2t)\}$. *Risp.* (*a*) $\dfrac{1}{\sqrt{s^2+6s+25}}$, (*b*) $\dfrac{s}{(s^2+4)^{3/2}}$

104. Dimostrare che (*a*) $J_0'(t) = -J_1(t)$, (*b*) $\dfrac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$.

105. Se $I_0(t) = J_0(it)$, dimostrare che $\mathcal{L}\{I_0(at)\} = \dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$, $a > 0$.

106. Determinare $\mathcal{L}\{t\,J_0(t)\,e^{-t}\}$. *Risp.* $(s-1)/(s^2-2s+2)^{3/2}$

107. Dimostrare che (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty J_0(t)\,dt = 1$, (*b*) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}J_0(t)\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

108. Determinare la trasformata di Laplace di $\dfrac{d^2}{dt^2}\{e^{2t}J_0(2t)\}$. *Risp.* $\dfrac{s^2}{\sqrt{s^2-4s+8}} - s - 2$

109. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t\,J_1(t)\} = \dfrac{1}{(s^2+1)^{3/2}}$.

110. Dimostrare che $\mathcal{L}\{J_0(a\sqrt{t})\} = \dfrac{e^{-a^2/4s}}{s}$.

111. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty t\,e^{-3t}J_0(4t)\,dt$. *Risp.* 3/125

112. Dimostrare che $\mathcal{L}\{J_n(t)\} = \dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$ e ottenere così la $\mathcal{L}\{J_n(at)\}$.

LE FUNZIONI SENO E COSENO INTEGRALI E INTEGRALESPONENZIALE

113. Calcolare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{2t}\,\mathrm{Si}(t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\,\mathrm{Si}(t)\}$.

Risp. (*a*) $\tan^{-1}(s-2)/(s-2)$, (*b*) $\dfrac{\tan^{-1}s}{s^2} - \dfrac{1}{s(s^2+1)}$

114. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t^2 \operatorname{Ci}(t)\} = \dfrac{\ln(s^2+1)}{s^3} - \dfrac{3s^2+1}{s(s^2+1)^2}$.

115. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-3t}\operatorname{Ei}(t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\operatorname{Ei}(t)\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{\ln(s+4)}{s+3}$, (*b*) $\dfrac{\ln(s+1)}{s^2} - \dfrac{1}{s(s+1)}$

116. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{-t}\operatorname{Si}(2t)\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{te^{-2t}\operatorname{Ei}(3t)\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{\tan^{-1}(s+1)/2}{s+1}$, (*b*) $\dfrac{1}{(s+2)^2}\ln\left(\dfrac{s+5}{3}\right) - \dfrac{1}{(s+2)(s+5)}$

LA FUNZIONE DEGLI ERRORI

117. Calcolare (*a*) $\mathcal{L}\{e^{3t}\operatorname{erf}\sqrt{t}\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t\operatorname{erf}(2\sqrt{t})\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{1}{(s-3)\sqrt{s-2}}$, (*b*) $\dfrac{3s+8}{s^2(s+4)^{3/2}}$

118. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\operatorname{erfc}\sqrt{t}\} = \dfrac{1}{\sqrt{s+1}\,\{\sqrt{s+1}+1\}}$

119. Determinare $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^t \operatorname{erf}\sqrt{u}\,du\right\}$. *Risp.* $1/s^2\sqrt{s+1}$

LA FUNZIONE A SCALINO UNITARIO, LE FUNZIONI IMPULSIVE E LA FUNZIONE DELTA DI DIRAC

120. (*a*) Dimostrare che in termini della funzione a scalino unitario di Heaviside, la funzione $F(t) = \begin{cases} e^{-t} & 0 < t < 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$ può essere scritta nella forma $e^{-t}\{1 - \mathcal{U}(t-3)\}$. (*b*) Usare la relazione $\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as}/s$ per determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Risp. (*b*) $\dfrac{1-e^{-3(s+1)}}{s+1}$

121. Dimostrare che $F(t) = \begin{cases} F_1(t) & 0 < t < a \\ F_2(t) & t > a \end{cases}$ può essere scritta nella forma

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}\,\mathcal{U}(t-a)$$

122. Se $F(t) = F_1(t)$ per $0 < t < a_1$, $F_2(t)$ per $a_1 < t < a_2$, ..., $F_{n-1}(t)$ per $a_{n-2} < t < a_{n-1}$, e $F_n(t)$ per $t > a_{n-1}$, dimostrare che

$$F(t) = F_1(t) + \{F_2(t) - F_1(t)\}\,\mathcal{U}(t-a_1) + \cdots + \{F_n(t) - F_{n-1}(t)\}\,\mathcal{U}(t-a_{n-1})$$

123. Esprimere in termini della funzione a scalino unitario di Heaviside le seguenti funzioni.

(*a*) $F(t) = \begin{cases} t^2 & 0 < t < 2 \\ 4t & t > 2 \end{cases}$ (*b*) $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ \sin 2t & \pi < t < 2\pi \\ \sin 3t & t > 2\pi \end{cases}$

Risp. (*a*) $t^2 + (4t - t^2)\,\mathcal{U}(t-2)$, (*b*) $\sin t + (\sin 2t - \sin t)\,\mathcal{U}(t-\pi) + (\sin 3t - \sin 2t)\,\mathcal{U}(t-2\pi)$

124. Dimostrare che $\mathcal{L}\{t^2\,\mathcal{U}(t-2)\} = \dfrac{2}{s^3} - \dfrac{2e^{-2s}}{s^3}(1 + 2s + 2s^2)$, $s > 0$.

125. Calcolare (*a*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2t\,\delta(t - \pi/3)\,dt$, (*b*) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\,\mathcal{U}(t-2)\,dt$. *Risp.* (*a*) $-1/2$, (*b*) e^{-2}

126. (*a*) Se $\delta'(t-a)$ indica la derivata formale della funzione delta, dimostrare che

$$\int_0^{\infty} F(t)\,\delta'(t-a)\,dt = -F'(a)$$

(*b*) Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-4t}\,\delta'(t-2)\,dt$.

Risp. (*b*) $4e^{-8}$

127. Sia $G_\epsilon(t) = 1/\epsilon$ per $0 \leqq t < \epsilon$, 0 per $\epsilon \leqq t < 2\epsilon$, $-1/\epsilon$ per $2\epsilon \leqq t < 3\epsilon$, e 0 per $t \geqq 3\epsilon$.
(*a*) Determinare $\mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$. (*b*) Determinare $\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\}$. (*c*) E' $\lim_{\epsilon\to 0}\mathcal{L}\{G_\epsilon(t)\} = \mathcal{L}\left\{\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(t)\right\}$?
(*d*) Discutere geometricamente i risultati di (*a*) e (*b*).

128. Generalizzare il problema 127 definendo una funzione $G_\epsilon(t)$ in termini di ϵ e n in modo tale che $\lim_{\epsilon\to 0} G_\epsilon(t) = s^n$ dove $n = 2, 3, 4, \ldots$

CALCOLO DI INTEGRALI

129. Calcolare $\displaystyle\int_0^{\infty} t^3 e^{-t}\sin t\,dt$. *Risp.* 0

130. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{4}$.

131. Dimostrare che (*a*) $\displaystyle\int_0^{\infty} J_n(t)\,dt = 1$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\infty} t\,J_n(t)\,dt = 1$.

132. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} u\,e^{-u^2} J_0(au)\,du = \tfrac{1}{2}e^{-a^2/4}$.

133. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} t\,e^{-t}\operatorname{Ei}(t)\,dt = \ln 2 - \tfrac{1}{2}$.

134. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\infty} u\,e^{-u^2}\operatorname{erf} u\,du = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

PROBLEMI VARI

135. Se $F(t) = \begin{cases} \sin t & 0 < t < \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$, dimostrare che $\mathcal{L}\{F(t)\} = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$.

136. Se $F(t) = \begin{cases} \cos t & 0 < t < \pi \\ \sin t & t > \pi \end{cases}$, determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$. *Risp.* $\dfrac{s + (s-1)e^{-\pi s}}{s^2+1}$

137. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\sin^3 t\} = \dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}$.

138. Dimostrare i casi (*a*) 16, (*b*) 17, (*c*) 20, (*d*) 28 della tabella di pag. 246.

139. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{\sinh^3 2t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{t^3 \cos 4t\}$.

Risp. (*a*) $\dfrac{48}{(s^2-36)(s^2-4)}$, (*b*) $\dfrac{6s^4-576s^2+1536}{(s^2+16)^4}$

140. Se $F(t) = 5\sin 3(t-\pi/4)$ per $t > \pi/4$ e 0 per $t < \pi/4$, determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$. *Risp.* $e^{-\pi s/4}/(s^2+9)$

141. Se $\mathcal{L}\{t\,F(t)\} = \dfrac{1}{s(s^2+1)}$, determinare $\mathcal{L}\{e^{-t}F(2t)\}$.

142. Determinare (*a*) $\mathcal{L}\{\sinh 2t \cos 2t\}$, (*b*) $\mathcal{L}\{\cosh 2t \cos 2t\}$.

Risp. (*a*) $2(s^2-8)/(s^4+64)$, (*b*) $s^3/(s^4+64)$

143. Sia $F(t) = \begin{cases} t+n & 2n \leqq t < 2n+1 \\ n-t & 2n+1 \leqq t < 2n+2 \end{cases}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Dimostrare che

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{s^2}\sum_{n=0}^{\infty}\{(3ns+1)\,e^{-2ns} - 2[(2n+1)s+1]\,e^{-(2n+1)s} + [(n+2)s+1]\,e^{-(2n+2)s}\}$$

144. (*a*) Dimostrare che $\mathcal{L}\{\sin^5 t\} = \dfrac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}$.

(*b*) Usando i risultati ottenuti nella parte (*a*) del problema 137, è possibile arrivare ad un risultato corrispondente per $\mathcal{L}\{\sin^{2n-1} t\}$ dove n è un numero intero positivo qualsiasi? Giustificare la risposta data.

145. Si supponga che $F(t)$ sia illimitata per $t \to 0$. Dimostrare che $\mathcal{L}\{F(t)\}$ esiste se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

(*a*) $F(t)$ è continua a tratti in ogni intervallo $N_1 \leqq t \leqq N$ dove $N_1 > 0$,

(*b*) $\lim_{t\to 0} t^n F(t) = 0$ per qualche costante n tale per cui $0 < n < 1$,

(*c*) $F(t)$ è di ordine esponenziale γ per $t > N$.

146. Dimostrare che (*a*) $\mathcal{L}\{J_0(t)\sin t\} = \dfrac{1}{\sqrt{s}\,\sqrt[4]{s^2+4}}\sin\{\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

(*b*) $\mathcal{L}\{J_0(t)\cos t\} = \dfrac{1}{\sqrt{s}\,\sqrt[4]{s^2+4}}\cos\{\tfrac{1}{2}\tan^{-1}(2/s)\}$

147. Sia $F(t) = \begin{cases} t\,G(t) & t > 1 \\ 0 & 0 < t < 1 \end{cases}$. Dimostrare che $\mathcal{L}\{F(t)\} = -\dfrac{d}{ds}[e^{-s}\mathcal{L}\{G(t+1)\}]$.

148. Se $\mathcal{L}\{F''(t)\} = \tan^{-1}(1/s)$, $F(0) = 2$ e $F'(0) = -1$, determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

Risp. $\dfrac{2s-1+\tan^{-1}1/s}{s^2}$

149. Dimostrare che $\mathcal{L}\{e^{\alpha t}F(\beta t)\} = \dfrac{1}{\beta}f\left(\dfrac{s-\alpha}{\beta}\right)$ dove α e β sono costanti e $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$.

150. Dimostrare che la trasformata di Laplace di e^{e^t} non esiste, mentre esiste la trasformata di Laplace di e^{-e^t}.

151. (*a*) Dimostrare che $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\sin^2 t}{t}\right\} = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{s^2+4}{s^2}\right)$.

(*b*) Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin^2 t}{t}\,dt$.

Risp. (*b*) $\frac{1}{4}\ln 5$

152. (*a*) Determinare $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1-J_0(t)}{t}\right\}$. (*b*) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-t}\{1-J_0(t)\}}{t}\,dt = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$.

153. Risolvere i problemi 37 e 38 usando il procedimento 4 del problema 36.

154. Si supponga che $\mathcal{L}\{F(t)\}$ esiste per $s = a$ dove a è reale. Dimostrare che la trasformata esiste per ogni $s > a$.

155. Determinare la trasformata di Laplace della funzione periodica $F(t)$ rappresentata graficamente in fig. 1-10.

Risp. $\dfrac{1-e^{-as}-as\,e^{-as}}{s^2(1-e^{-as})}\tan\theta_0$

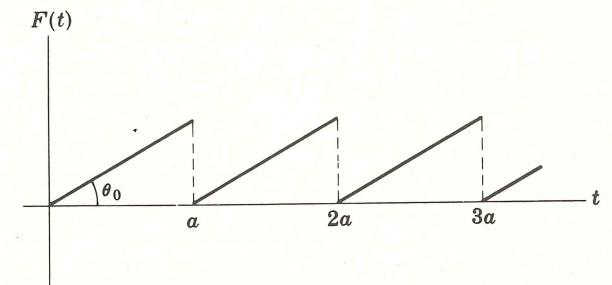



Fig. 1-10

156. Dimostrare che

$$\mathcal{L}\{\sin t^2\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(4n-2)!}{(2n-1)!\,s^{2n+1}}$$

157. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\sin^6 t\} = \dfrac{6!}{s(s^2+4)(s^2+16)(s^2+36)}$ e generalizzare il risultato (v. problema 144).

158. Determinare $\mathcal{L}\{t\,e^{-2t}J_0(t\sqrt{2})\}$. *Risp.* $\dfrac{s+2}{(s^2+4s+6)^{3/2}}$

159. Determinare $\mathcal{L}\{t\,\mathcal{U}(t-1) + t^2\,\delta(t-1)\}$. *Risp.* $e^{-s}(s^2+s+1)/s^2$

160. Determinare $\mathcal{L}\{\cos t \ln t\ \delta(t-\pi)\}$. *Risp.* $-e^{-\pi s}\ln\pi$

161. Siano $F(t)$ e $G(t)$ generalmente continue in ogni intervallo limitato e di ordine esponenziale per $t \to \infty$. Dimostrare che esiste la $\mathcal{L}\{F(t)\,G(t)\}$.

162. I *polinomi di Laguerre* $L_n(t)$ sono definiti come

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\{t^n e^{-t}\} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

(*a*) Determinare $L_0(t), L_1(t), \ldots, L_4(t)$. (*b*) Determinare $\mathcal{L}\{L_n(t)\}$.

163. (*a*) Siano a, b, α, β e Λ delle costanti. Dimostrare che

$$\mathcal{L}\{at^{-\alpha} + bt^{-\beta}\} = \Lambda\{as^{-\alpha} + bs^{-\beta}\}$$

se e solo se $\alpha + \beta = 1$ e $\Lambda = \pm\sqrt{\pi\csc\alpha\pi}$.

(*b*) Si dice che una funzione $F(t)$ è la propria trasformata di Laplace se $\mathcal{L}\{F(t)\} = F(s)$. Può la funzione $F(t) = at^{-\alpha} + bt^{-\beta}$ essere la trasformata di Laplace di se stessa? Spiegare.

164. Se $F(t)$ e $G(t)$ ammettono le relative trasformate di Laplace, è vero che anche $F(t)\,G(t)$ ammette la trasformata di Laplace? Giustificare la risposta.

165. Usare la formula $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t \sin\theta)\,d\theta$ per dimostrare che $\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$.

166. Dimostrare che la regola di Leibniz è applicabile nel problema 19, definendo le necessarie restrizioni per $F(t)$.

167. (*a*) Dimostrare che $\int_0^{\infty} e^{-st}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)dt = \frac{\pi}{2} - s\ln\left(\frac{s^2}{s^2+1}\right) + 2\tan^{-1}s$.

(*b*) Dimostrare che $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

168. Sia $F(t) = 0$ se t è irrazionale e 1 se t è razionale. (*a*) Dimostrare che $\mathcal{L}\{F(t)\}$ esiste ed è eguale a zero. (*b*) La funzione $F(t)$ è una funzione nulla? Spiegare.

169. Dimostrare che $\int_0^{\infty} t^2 J_0(t)\,dt = -1$.

170. Dimostrare che se p è un numero intero positivo qualsiasi,

$$\Gamma(-p-\tfrac{1}{2}) = (-1)^{p+1}\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{5}\right)\cdots\left(\frac{2}{2p+1}\right)\sqrt{\pi}$$

171. Verificare i casi (*a*) 55, (*b*) 61, (*c*) 64, (*d*) 65, (*e*) 81 della tabella dell'appendice B, pag. 248 e 250.

172. Usando il teorema binomiale dimostrare che per $|x| < 1$,

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

e così verificare la somma delle serie dei problemi 34 e 39.

173. Usare le serie per determinare le trasformate di Laplace di (*a*) $\sin t$, (*b*) $\cos t$, (*c*) e^{at}, (*d*) $\cos\sqrt{t}$.

174. Dimostrare che $\mathcal{L}\{\text{erf}\,(t)\} = \frac{e^{s^2/4}}{s}\,\text{erfc}\,(s/2)$ e così determinare $\mathcal{L}\{\text{erf}\,(at)\}$.

175. (*a*) Determinare $\mathcal{L}\{\text{erf}\,\sqrt{t}\}$ usando il metodo delle equazioni differenziali.
(*b*) Determinare $\mathcal{L}\{\cos\sqrt{t}/\sqrt{t}\}$ usando le serie.

176. Dimostrare che (*a*) $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu})\cos u\,du = \sin t$,

(*b*) $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu})\sin u\,du = \cos t$.

177. Dimostrare che $\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{tu})\,J_0(u)\,du = J_0(t)$.

178. Usare (*a*) le serie, (*b*) le equazioni differenziali per determinare $\mathcal{L}\{J_1(t)\}$ (v. problema 35).

179. Se $s > 0$ e $n > 1$, dimostrare che

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^{n-1}}{1-e^{-t}}\right\} = \Gamma(n)\left\{\frac{1}{s^n} + \frac{1}{(s+1)^n} + \frac{1}{(s+2)^n} + \cdots\right\}$$

180. Dimostrare che se $n > 1$

$$\zeta(n) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}\frac{t^{n-1}}{e^t-1}\,dt = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots$$

La funzione $\zeta(n)$ è detta *funzione zeta di Riemann.*

181. Se $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, dimostrare che

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^{\infty}\frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du\right\} = \frac{f(\ln s)}{s\ln s}$$

182. Se $L_n(t)$, $n = 0,1,2,\ldots$, sono polinomi di Laguerre (v. problema 162), dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(t)}{n!} = e\,J_0(2\sqrt{t})$$

183. Sia $J(a,t) = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t}\cos au\,du$. (*a*) Dimostrare che $\frac{\partial J}{\partial a} = -\frac{a}{2t}J$ dove $J(0,t) = \sqrt{\pi}/2\sqrt{t}$.
(*b*) Risolvendo l'equazione differenziale in (*a*) dimostrare che

$$J(a,t) = \int_0^{\infty} e^{-u^2 t}\cos au\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}$$

184. Usare il problema 183 per determinare $\mathcal{L}\left\{\frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right\}$ (v. problema 49, pag. 29).

185. Dimostrare che $\int_0^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{2}t}\sinh t\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{8}$.

CAPITOLO 2

Antitrasformata di Laplace

DEFINIZIONE DELL'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

Se la trasformata di Laplace di una funzione $F(t)$ è $f(s)$, se cioè $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora si dice che $F(t)$ è l'*inversa della trasformata di Laplace* o *antitrasformata di Laplace* di $f(s)$ e si scrive $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ dove $\mathcal{L}^{-1}$ è detto *operatore trasformazione inversa di Laplace* o *antitrasformazione di Laplace*.

Esempio. Dato che $\mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \dfrac{1}{s+3}$ si scrive

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} = e^{-3t}$$

UNICITA' DELL'ANTITRASFORMATA DI LAPLACE. TEOREMA DI LERCH

Dato che la trasformata di Laplace di una funzione nulla $\mathcal{N}(t)$ è zero (v. cap. 1, pag. 9), è chiaro che se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ allora è anche $\mathcal{L}\{F(t)+\mathcal{N}(t)\} = f(s)$. Da ciò segue che si possono avere due funzioni diverse con la stessa trasformata di Laplace.

Esempio. Le due funzioni diverse $F_1(t) = e^{-3t}$ e $F_2(t) = \begin{cases} 0 & t=1 \\ e^{-3t} & \text{altrove} \end{cases}$ hanno la stessa trasformata di Laplace, cioè $1/(s+3)$.

Se si ammettono le funzioni nulle si vede quindi che l'antitrasformata di Laplace non è unica. Essa è tuttavia unica se si escludono le funzioni nulle (che del resto in generale non si presentano in problemi fisicamente rilevanti). Questa conclusione è riassunta nel

Teorema 2-1. *Teorema di Lerch.* Se ci si limita a funzioni $F(t)$ generalmente continue in ogni intervallo limitato $0 \leqq t \leqq N$ e di ordine esponenziale per $t > N$, l'antitrasformata di Laplace di $f(s)$, cioè $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, è unica. Salvo affermazione contraria esplicita, nel seguito si supporrà di trovarsi sempre in tale situazione.

ALCUNE ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

Le seguenti formule derivano direttamente dalle formule date a pag. 1.

Tabella di antitrasformate di Laplace

	$f(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
1.	$\dfrac{1}{s}$	1
2.	$\dfrac{1}{s^2}$	t
3.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}$ $n = 0,1,2,\ldots$	$\dfrac{t^n}{n!}$
4.	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\dfrac{1}{s^2+a^2}$	$\dfrac{\sin at}{a}$
6.	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
7.	$\dfrac{1}{s^2-a^2}$	$\dfrac{\sinh at}{a}$
8.	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$

ALCUNE IMPORTANTI PROPRIETA' DELLE ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

Nell'elenco che segue sono riunite varie importanti proprietà delle antitrasformate di Laplace. Si noti l'analogia tra le proprietà 1-8 e le proprietà corrispondenti di pag. 3-5.

1. **Proprietà della linearità.**

Teorema 2-2. Se c_1 e c_2 sono costanti qualsiasi e $f_1(s)$ e $f_2(s)$ sono le trasformate di Laplace di $F_1(t)$ e $F_2(t)$ rispettivamente, allora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} &= c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} \\ &= c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)\end{aligned} \quad (1)$$

La formula può facilmente essere generalizzata al caso di più di due funzioni.

Esempio.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} &= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} \\ &\quad + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} \\ &= 4e^{2t} - 3\cos 4t + \frac{5}{2}\sin 2t\end{aligned}$$

A causa di questa proprietà si dice che $\mathcal{L}^{-1}$ è un *operatore lineare* o che gode della *proprietà della linearità*.

2. **Prima proprietà della traslazione.**

Teorema 2-3. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t) \quad (2)$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^t\sin 2t$$

3. **Seconda proprietà della traslazione.**

Teorema 2-4. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \tag{3}$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\pi s/3}}{s^2+1}\right\} = \begin{cases} \sin(t-\pi/3) & \text{se } t > \pi/3 \\ 0 & \text{se } t < \pi/3 \end{cases}$$

4. **Proprietà del cambio di scala.**

Teorema 2-5. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{t}{k}\right) \tag{4}$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} = \cos 4t$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(2s)^2+16}\right\} = \frac{1}{2}\cos\frac{4t}{2} = \frac{1}{2}\cos 2t$$

come si può verificare direttamente.

5. **Antitrasformata di Laplace di derivate.**

Teorema 2-6. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^n}{ds^n}f(s)\right\} = (-1)^n t^n F(t) \tag{5}$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ e $\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2}$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right\} = -t\sin t \quad \text{o} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t$$

6. **Antitrasformata di Laplace di integrali.**

Teorema 2-7. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty f(u)\,du\right\} = \frac{F(t)}{t} \tag{6}$$

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right\} = 1-e^{-t}$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)\right\} = \frac{1-e^{-t}}{t}$$

7. **Prodotto per s^n.**

Teorema 2-8. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ e $F(0) = 0$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t) \tag{7}$$

Quindi la moltiplicazione per s ha come conseguenza la *derivazione* di $F(t)$.

Se $F(0) \neq 0$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s) - F(0)\} = F'(t) \tag{8}$$

o

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t) + F(0)\,\delta(t) \tag{9}$$

dove $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac o funzione impulsiva unitaria (v. pag. 9).

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$ e $\sin 0 = 0$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} = \frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t$$

Sono possibili generalizzazioni a $\mathcal{L}^{-1}\{s^n f(s)\}$, $n = 2, 3, \ldots$

8. **Divisione per s.**

Teorema 2-9. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du \tag{10}$$

Quindi la divisione per s (o moltiplicazione per $1/s$) ha come conseguenza l'*integrazione* di $F(t)$ tra 0 e t.

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+4)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\sin 2u\,du = \frac{1}{4}(1-\cos 2t)$$

Sono possibili generalizzazioni a $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)/s^n\}$, $n = 2, 3, \ldots$, (v. problema 70).

9. **Proprietà della convoluzione.**

Teorema 2-10. Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = F * G \tag{11}$$

$F * G$ è detta *convoluzione* o *faltung* di F e G e il teorema enunciato è detto *teorema* o *proprietà della convoluzione*.

Dal problema 21 si vedrà che $F * G = G * F$.

Esempio. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^t$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\} = \int_0^t e^u e^{2(t-u)}\,du = e^{2t} - e^t$$

METODI PER DETERMINARE LE ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

Per determinare le antitrasformate di Laplace sono disponibili vari metodi, come indicato nell'elenco che segue. Confrontare con l'elenco di pag. 6.

1. **Metodo delle frazioni parziali.** Ogni funzione razionale $P(s)/Q(s)$, dove $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi e il grado di $P(s)$ è minore di quello di $Q(s)$, può essere scritta come somma di funzioni razionali (dette *frazioni parziali*) della forma $\frac{A}{(as+b)^r}$, $\frac{As+B}{(as^2+bs+c)^r}$ dove $r = 1, 2, 3, \ldots$ Determinando l'antitrasformata di Laplace di ognuna delle frazioni parziali, si arriva a determinare $\mathcal{L}^{-1}\{P(s)/Q(s)\}$.

   Esempio 1. $\frac{2s-5}{(3s-4)(2s+1)^3} = \frac{A}{3s-4} + \frac{B}{(2s+1)^3} + \frac{C}{(2s+1)^2} + \frac{D}{2s+1}$

   Esempio 2. $\frac{3s^2-4s+2}{(s^2+2s+4)^2(s-5)} = \frac{As+B}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+4} + \frac{E}{s-5}$

   Le costanti A, B, C, ecc. possono essere determinate riducendo le frazioni allo stesso denominatore ed eguagliando i coefficienti delle potenze di s che figurano nei due membri della equazione che ne risulta, oppure in altri modi (v. problemi 24-28). Uno dei metodi usati sfrutta la *formula dello sviluppo di Heaviside* (v. appresso).

2. **Metodo delle serie.** Se $f(s)$ ammette uno sviluppo in serie di potenze negative di s del tipo

$$f(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + \frac{a_3}{s^4} + \cdots \tag{12}$$

   allora, sotto opportune condizioni, si può invertire termine a termine e ottenere

$$F(t) = a_0 + a_1 t + \frac{a_2 t^2}{2!} + \frac{a_3 t^3}{3!} + \cdots \tag{13}$$

   (v. problema 40). A volte si possono usare anche sviluppi in serie di tipo diverso dal (*12*) (v. problema 41).

3. **Metodo delle equazioni differenziali** (v. problema 41).

4. **Derivazione rispetto ad un parametro** (v. problemi 13 e 38).

5. **Metodi vari che sfruttano i teoremi sopra enunciati.**

6. **Uso delle tabelle** (v. appendice B).

7. **Formula di inversione complessa.** Questa formula, che fornisce un potente metodo diretto per la determinazione delle inverse delle trasformate di Laplace, usa la teoria delle variabili complesse e sarà considerata nel cap. 6.

FORMULA DELLO SVILUPPO DI HEAVISIDE

Siano $P(s)$ e $Q(s)$ polinomi con $P(s)$ di grado minore di $Q(s)$. Si supponga che $Q(s)$ abbia n zeri distinti α_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \tag{14}$$

Questa relazione è generalmente chiamata *teorema* o *formula di sviluppo di Heaviside* (v. problemi 29-31).

La formula può essere estesa ad altri casi (v. problemi 105 e 111).

LA FUNZIONE BETA

Se $m > 0$, $n > 0$, la *funzione beta* è definita come

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\,du \tag{15}$$

Si possono dimostrare (v. problemi 32 e 33) le seguenti proprietà:

1. $B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

2. $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$

CALCOLO DI INTEGRALI

La trasformazione di Laplace è spesso utile nel calcolo di integrali definiti. Si vedano ad es. i problemi 35-37.

PROBLEMI RISOLTI

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

1. Dimostrare che (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, dove $0! = 1$,

   (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$, (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$, (*e*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\sinh at}{a}$,

   (*f*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

   (*a*) $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{at}$.

   (*b*) $\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!}\right\} = \frac{1}{n!}\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{n!}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = \frac{1}{s^{n+1}}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!}$ for $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

   (*c*) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin at}{a}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2+a^2} = \frac{1}{s^2+a^2}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$.

   (*d*) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos at$.

(*e*) $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh at}{a}\right\} = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{1}{a}\cdot\frac{a}{s^2-a^2} = \frac{1}{s^2-a^2}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-a^2}\right\} = \frac{\sinh at}{a}$.

(*f*) $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2-a^2}$. Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\} = \cosh at$.

2. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$ per $n > -1$.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\right\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{1}{\Gamma(n+1)}\cdot\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{1}{s^{n+1}}, \quad n > -1$$

per il problema 31, pag. 22.

Allora $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}$, $n > -1$. Si noti che se $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, si ha $\Gamma(n+1) = n!$

e il risultato coincide con quello del problema 1(*b*).

3. Determinare ognuna delle seguenti antitrasformate di Laplace.

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}$ (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$ (*e*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-16}\right\}$ (*g*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\}$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\}$ (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\}$ (*f*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\}$

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\} = \frac{\sin 3t}{3}$ [problema 1(*c*)]

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2}\right\} = 4e^{2t}$ [problema 1(*a*)]

(*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = \frac{t^3}{3!} = \frac{t^3}{6}$ [problema 1(*b*) o 2]

(*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2}\right\} = \cos\sqrt{2}\,t$ [problema 1(*d*)]

(*e*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s}{s^2-16}\right\} = 6\cosh 4t$ [problema 1(*f*)]

(*f*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-3}\right\} = \frac{\sinh\sqrt{3}\,t}{\sqrt{3}}$ [problema 1(*e*)]

(*g*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{3/2}}\right\} = \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{2t^{1/2}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ [problema 2]

PROPRIETA' DELLA LINEARITA', DELLA TRASLAZIONE E DEL CAMBIO DI SCALA

4. Dimostrare la *proprietà della linearità* per l'antitrasformata di Laplace (*teorema 2-2*, pag. 43).

Per il problema 5, pag. 12, si ha

$$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1f_1(s) + c_2f_2(s)$$

Allora
$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1f_1(s) + c_2f_2(s)\} = c_1F_1(t) + c_2F_2(t) = c_1\mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2\mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$$

Il risultato può essere facilmente generalizzato (v. problema 52).

5. Determinare (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\}$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9}\right\}$.

(*a*)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s+4}{s^3} - \frac{2s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\sqrt{s}}{s^4}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2} + \frac{4}{s^3} - \frac{2s}{s^2+9} + \frac{18}{s^2+9} + \frac{24}{s^4} - \frac{30}{s^{7/2}}\right\}\\ &= 5t + 4(t^2/2!) - 2\cos 3t + 18(\tfrac{1}{3}\sin 3t) + 24(t^3/3!) - 30\{t^{5/2}/\Gamma(7/2)\}\\ &= 5t + 2t^2 - 2\cos 3t + 6\sin 3t + 4t^3 - 16t^{5/2}/\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

dato che $\Gamma(7/2) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$.

(*b*)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{2s-3} - \frac{3+4s}{9s^2-16} + \frac{8-6s}{16s^2+9}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-3/2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2-16/9}\right) - \frac{4}{9}\left(\frac{s}{s^2-16/9}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2+9/16}\right) - \frac{3}{8}\left(\frac{s}{s^2+9/16}\right)\right\}\\ &= 3e^{3t/2} - \tfrac{1}{4}\sinh 4t/3 - \tfrac{4}{9}\cosh 4t/3 + \tfrac{2}{3}\sin 3t/4 - \tfrac{3}{8}\cos 3t/4\end{aligned}$$

6. Dimostrare la *prima proprietà della traslazione*: Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Per il problema 7, pag. 13, si ha $\mathcal{L}\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$. Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

Altro procedimento. Dato che $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, si ha

$$f(s-a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st}\{e^{at}F(t)\}\,dt = \mathcal{L}\{e^{at}F(t)\}$$

Allora
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at}F(t)$$

7. Determinare ognuna delle seguenti antitrasformate:

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$ (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$

(*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\}$

(*a*)
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)+8}{(s-2)^2+16}\right\}\\ &= 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{(s-2)^2+16}\right\}\\ &= 6e^{2t}\cos 4t + 2e^{2t}\sin 4t = 2e^{2t}(3\cos 4t + \sin 4t)\end{aligned}$$

(*b*)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4s+12}{(s+4)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4(s+4)-4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} - 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$= 4e^{-4t} - 4te^{-4t} = 4e^{-4t}(1-t)$$

(*c*)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-1)^2-4}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+10}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$= 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s-1)^2-4}\right\} + 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2-4}\right\}$$

$$= 3e^t\cosh 2t + 5e^t\sinh 2t = e^t(3\cosh 2t + 5\sinh 2t)$$

$$= 4e^{3t} - e^{-t}$$

Per un altro procedimento, v. problema 24.

(*d*)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{2s+3}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+3/2)^{1/2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3t/2}\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-1/2}e^{-3t/2}$$

8. Dimostrare la *seconda proprietà della traslazione*:

Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$ dove

$$G(t) = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Procedimento 1. Per il problema 9, pag. 14, si ha $\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as}f(s)$. Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}f(s)\} = G(t)$$

Procedimento 2. Dato che $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, si ha

$$e^{-as}f(s) = \int_0^\infty e^{-as}e^{-st}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-s(t+a)}F(t)\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-su}F(u-a)\,du \qquad [\text{posto } t+a=u]$$

$$= \int_0^a e^{-st}(0)\,dt + \int_a^\infty e^{-st}F(t-a)\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt$$

da cui si ottiene la relazione voluta.

Si deve notare che si può scrivere $G(t)$ in termini della funzione a scalino unitario di Heaviside $F(t-a)\,\mathcal{U}(t-a)$.

9. Determinare ognuna delle seguenti antitrasformate:

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\}$, (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$, (*d*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$.

(*a*) Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-2)^4}\right\} = e^{2t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4}\right\} = \dfrac{t^3e^{2t}}{3!} = \dfrac{1}{6}t^3e^{2t}$, per il problema 8 si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{(s-2)^4}\right\} = \begin{cases} \frac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)} & t > 5 \\ 0 & t < 5 \end{cases}$$

$$= \tfrac{1}{6}(t-5)^3e^{2(t-5)}\,\mathcal{U}(t-5)$$

(*b*) Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\} = \cos 5t$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-4\pi s/5}}{s^2+25}\right\} = \begin{cases} \cos 5(t-4\pi/5) & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \cos 5t & t > 4\pi/5 \\ 0 & t < 4\pi/5 \end{cases}$$

$$= \cos 5t\,\mathcal{U}(t-4\pi/5)$$

(*c*) Si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+s+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}/2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\right\}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}t}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}\,t}{2} + \sin\frac{\sqrt{3}\,t}{2}\right)$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right\}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\} & t > \pi \\ 0 & t < \pi \end{cases}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}(t-\pi)}}{\sqrt{3}}\left\{\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi) + \sin\frac{\sqrt{3}}{2}(t-\pi)\right\}\mathcal{U}(t-\pi)$$

(*d*) Si ha $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^{-4t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{5/2}}\right\}$

$$= e^{-4t}\frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4t^{3/2}e^{-4t}}{3\sqrt{\pi}}$$

Quindi
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{4-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\} = e^4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^{5/2}}\right\}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4e^4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-3)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \dfrac{4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}} & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$$
$$= \frac{4\,(t-3)^{3/2}\,e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}\,\mathcal{U}(t-3)$$

10. Dimostrare la *proprietà del cambio di scala*: Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

Procedimento 1. Per il problema 11, pag. 14, si ha, sostituendo a con $1/k$, $\mathcal{L}\{F(t/k)\} = k\,f(ks)$. Allora
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$$

Procedimento 2. Dato che $f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$, si ha
$$f(ks) = \int_0^\infty e^{-kst}F(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,d(u/k) \qquad [\text{posto } u = kt]$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^\infty e^{-su}F(u/k)\,du = \frac{1}{k}\mathcal{L}\{F(t/k)\}$$

Allora $\mathcal{L}^{-1}\{f(ks)\} = \frac{1}{k}F(t/k)$.

11. Se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$, determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\}$ dove $a > 0$.

Per il problema 10, sostituendo ks a s, si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{(ks)^{1/2}}\right\} = \frac{1}{k}\,\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi(t/k)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/ks}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{t/k}}{\sqrt{\pi t}}$$

Allora ponendo $k = 1/a$,
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-a/s}}{s^{1/2}}\right\} = \frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$$

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE DI DERIVATE E INTEGRALI

12. Dimostrare il *teorema 2-6*, pag. 44: $\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Dato che $\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)$ (v. problema 19, pag. 17), si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{(n)}(s)\} = (-1)^n t^n F(t)$$

13. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$.

Si ha $\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{-2s}{(s^2+a^2)^2}$. Quindi $\frac{s}{(s^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)$.

Allora dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+a^2}\right\} = \frac{\sin at}{a}$, per il problema 12 si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}t\left(\frac{\sin at}{a}\right) = \frac{t\sin at}{2a}$$

Altro procedimento. Derivando rispetto al parametro a, si ha
$$\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right) = \frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}$$

Da ciò
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{da}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2as}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

o
$$\frac{d}{da}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\right\} = -2a\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$$

cioè
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} = -\frac{1}{2a}\frac{d}{da}(\cos at) = -\frac{1}{2a}(-t\sin at) = \frac{t\sin at}{2a}$$

14. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\}$.

Sia $f(s) = \ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right) = \mathcal{L}\{F(t)\}$. Allora $f'(s) = \frac{-2}{s(s^2+1)} = -2\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right\}$.

Quindi dato che $\mathcal{L}^{-1}\{f'(s)\} = -2(1-\cos t) = -t\,F(t)$, $F(t) = \frac{2(1-\cos t)}{t}$.

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE PER POTENZE DI s

15. Dimostrare il *teorema 2-9*: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)\,du$.

Sia $G(t) = \int_0^t F(u)\,du$. Allora $G'(t) = F(t)$, $G(0) = 0$. Quindi
$$\mathcal{L}\{G'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} - G(0) = s\,\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

e quindi
$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{f(s)}{s} \qquad \text{o} \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = G(t) = \int_0^t F(u)\,du$$

Confrontare con problema 17, pag. 16.

16. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv.$

Sia $G(t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$. Allora $G'(t) = \displaystyle\int_0^t F(u)\,du$ e $G''(t) = F(t)$. Dato che $G(0) = G'(0) = 0$,

$$\mathcal{L}\{G''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} - s\,G(0) - G'(0) = s^2\mathcal{L}\{G(t)\} = f(s)$$

Quindi $\quad \mathcal{L}\{G(t)\} = \dfrac{f(s)}{s^2} \quad$ o $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = G(t) = \displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$

Il risultato può essere scritto nella forma $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^2}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^2.$

In generale, $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^n}\right\} = \displaystyle\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n$

17. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s^2+1)}\right\}.$

Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$, per applicazioni ripetute del problema 15 si ottiene,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \int_0^t \sin u\,du = 1 - \cos t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (1-\cos u)\,du = t - \sin t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3(s^2+1)}\right\} = \int_0^t (u - \sin u)\,du = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1$$

Verifica: $\mathcal{L}\left\{\dfrac{t^2}{2} + \cos t - 1\right\} = \dfrac{1}{s^3} + \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{1}{s} = \dfrac{s^2+1+s^4-s^2(s^2+1)}{s^3(s^2+1)} = \dfrac{1}{s^3(s^2+1)}$

18. Dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{1}{2}t\sin t$, determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}.$

Procedimento 1. Per il *teorema 2-9* (problema 15), si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \int_0^t \tfrac{1}{2}u\sin u\,du$$

$$= (\tfrac{1}{2}u)(-\cos u) - (\tfrac{1}{2})(-\sin u)\Big|_0^t$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

Procedimento 2. Per il *teorema 2-8*, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{s\cdot\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1-1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \frac{d}{dt}\{\tfrac{1}{2}t\sin t\} = \tfrac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$$

Allora $\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+1}\right\} - \tfrac{1}{2}(t\cos t + \sin t) = \tfrac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

19. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)\right\}.$

Usando il problema 14, si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\right\} = \int_0^t \frac{2(1-\cos u)}{u}\,du = 2\int_0^t \frac{1-\cos u}{u}\,du$$

IL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

20. Dimostrare il *teorema della convoluzione*: Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ e $\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t)$, allora

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\,g(s)\} = \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du = F * G$$

Procedimento 1. Il risultato cercato è dimostrato se si è in grado di provare che

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\} = f(s)\,g(s) \qquad (1)$$

dove $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, $g(s) = \mathcal{L}\{G(t)\}$. Per provare ciò si nota che il primo membro della (1) è

$$\int_{t=0}^{\infty} e^{-st}\left\{\int_{u=0}^{t} F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt$$

$$= \int_{t=0}^{\infty}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt = \lim_{M\to\infty} s_M$$

dove $\quad s_M = \displaystyle\int_{t=0}^{M}\int_{u=0}^{t} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt \qquad (2)$

La regione del piano tu su cui è fatta l'integrazione (2) è mostrata ombreggiata in fig. 2-1.

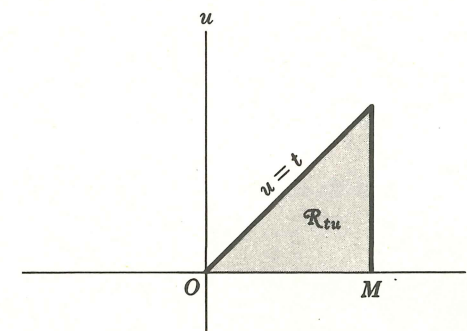
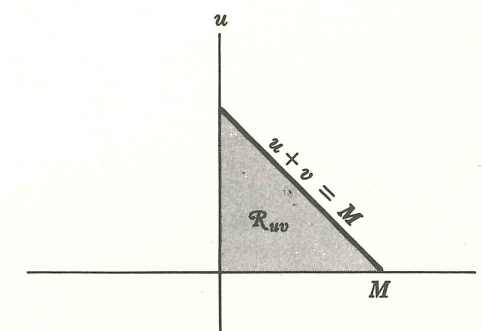



Fig. 2-1 Fig. 2-2

Posto $t-u = v$ o $t = u+v$, la regione ombreggiata $\mathcal{R}_{tu}$ del piano tu è trasformata nella regione ombreggiata $\mathcal{R}_{uv}$ del piano uv indicata in fig. 2-2. Allora per un teorema sulla trasformazione degli integrali multipli, si ha

$$s_M = \iint_{\mathcal{R}_{tu}} e^{-st}F(u)\,G(t-u)\,du\,dt = \iint_{\mathcal{R}_{uv}} e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\left|\frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv \qquad (3)$$

Dove lo *jacobiano della trasformazione* è

$$J \;=\; \frac{\partial(u,t)}{\partial(u,v)} \;=\; \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial u} & \dfrac{\partial u}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial t}{\partial u} & \dfrac{\partial t}{\partial v} \end{vmatrix} \;=\; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \;=\; 1$$

Allora il membro a destra della (*3*) è

$$s_M \;=\; \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M-v} e^{-s(u+v)}\,F(u)\,G(v)\,du\,dv \qquad (4)$$

Si definisca una nuova funzione

$$K(u,v) \;=\; \begin{cases} e^{-s(u+v)}\,F(u)\,G(v) & \text{se } u+v \leqq M \\ 0 & \text{se } u+v > M \end{cases} \qquad (5)$$

Questa funzione è definita nel quadrato di fig. 2-3, ma, come indicato nella (*5*), è zero nella regione non ombreggiata del quadrato. In termini di questa nuova funzione si può scrivere la (*4*) nella forma

$$s_M \;=\; \int_{v=0}^{M}\int_{u=0}^{M} K(u,v)\,du\,dv$$

Fig. 2-3

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{M\to\infty} s_M \;&=\; \int_0^\infty\int_0^\infty K(u,v)\,du\,dv \\ &=\; \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}\,F(u)\,G(v)\,du\,dv \\ &=\; \left\{\int_0^\infty e^{-su}\,F(u)\,du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv}\,G(v)\,dv\right\} \\ &=\; f(s)\,g(s) \end{aligned}$$

che dimostra il teorema.

L'integrale $\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \;=\; F*G$ è detto *integrale convoluzione* o, brevemente, *convoluzione* di F e G.

Per un procedimento diretto di dimostrazione del teorema della convoluzione, v. problema 85.

21. Dimostrare che $F*G \;=\; G*F$.

Posto $t-u = v$ o $u = t-v$, si ha

$$\begin{aligned} F*G \;&=\; \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \;=\; \int_0^t F(t-v)\,G(v)\,dv \\ &=\; \int_0^t G(v)\,F(t-v)\,dv \;=\; G*F \end{aligned}$$

Ciò dimostra che la *convoluzione* di F e G obbedisce alla *legge commutativa* dell'algebra. Esso sottostà anche alla *legge associativa* e alla *legge distributiva* (v. problemi 80 e 81).

22. Calcolare ognuna delle seguenti antitrasformate usando il teorema della convoluzione.

(*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+1)^2}\right\}$.

(*a*) Si può scrivere $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2} \;=\; \dfrac{s}{s^2+a^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+a^2}$. Allora dato che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} \;=\; \cos at$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\} \;=\; \dfrac{\sin at}{a}$, si ha per il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\} \;&=\; \int_0^t \cos au\cdot\frac{\sin a(t-u)}{a}\,du \\ &=\; \frac{1}{a}\int_0^t (\cos au)(\sin at\cos au \;-\; \cos at\sin au)\,du \\ &=\; \frac{1}{a}\sin at\int_0^t \cos^2 au\,du \;-\; \frac{1}{a}\cos at\int_0^t \sin au\cos au\,du \\ &=\; \frac{1}{a}\sin at\int_0^t\left(\frac{1+\cos 2au}{2}\right)du \;-\; \frac{1}{a}\cos at\int_0^t\frac{\sin 2au}{2}\,du \\ &=\; \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2at}{4a}\right) \;-\; \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{1-\cos 2at}{4a}\right) \\ &=\; \frac{1}{a}\sin at\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin at\cos at}{2a}\right) \;-\; \frac{1}{a}\cos at\left(\frac{\sin^2 at}{2a}\right) \\ &=\; \frac{t\sin at}{2a} \end{aligned}$$

Confrontare con il problema 13, pag. 53.

(*b*) Si ha $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2}\right\} \;=\; t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)^2}\right\} \;=\; t\,e^{-t}$. Allora per il teorema della convoluzione,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+1)^2}\right\} \;&=\; \int_0^t (ue^{-u})(t-u)\,du \\ &=\; \int_0^t (ut-u^2)\,e^{-u}\,du \\ &=\; (ut-u^2)(-e^{-u}) \;-\; (t-2u)(e^{-u}) \;+\; (-2)(-e^{-u})\Big|_0^t \\ &=\; te^{-t} \;+\; 2e^{-t} \;+\; t \;-\; 2 \end{aligned}$$

Verifica:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{te^{-t}+2e^{-t}+t-2\} \;&=\; \frac{1}{(s+1)^2} \;+\; \frac{2}{s+1} \;+\; \frac{1}{s^2} \;-\; \frac{2}{s} \\ &=\; \frac{s^2 \;+\; 2s^2(s+1) \;+\; (s+1)^2 \;-\; 2s(s+1)^2}{s^2(s+1)^2} \;=\; \frac{1}{s^2(s+1)^2} \end{aligned}$$

23. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv \;=\; \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$.

Per il teorema della convoluzione, se $f(s) \;=\; \mathcal{L}\{F(t)\}$, si ha

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du\right\} = \mathcal{L}\{t\}\,\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{f(s)}{s^2}$$

Allora per il problema 16,

$$\int_0^t (t-u)\,F(u)\,du = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2}\right\} = \int_0^t\int_0^v F(u)\,du\,dv$$

Il risultato può essere posto nella forma

$$\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^2 = \int_0^t (t-u)\,F(u)\,du$$

In generale si può dimostrare (v. problemi 83 e 84) che

$$\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\,F(u)\,du$$

FRAZIONI PARZIALI

24. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s-3}\right\}$.

Procedimento 1. $$\frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{A}{s-3}+\frac{B}{s+1} \qquad (1)$$

Moltiplicando per $(s-3)(s+1)$, si ottiene

$$3s+7 = A(s+1)+B(s-3) = (A+B)s + A - 3B$$

Eguagliando i coefficienti $A+B=3$ e $A-3B=7$; allora $A=4,\ B=-1$,

$$\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)} = \frac{4}{s-3}-\frac{1}{s+1}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+7}{(s-3)(s+1)}\right\} = 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = 4e^{3t} - e^{-t}$$

Procedimento 2. Moltiplicare ambedue i membri della (*1*) per $s-3$ e porre $s\to 3$. Allora

$$\lim_{s\to 3}\frac{3s+7}{s+1} = A + \lim_{s\to 3}\frac{B(s-3)}{s+1} \quad \text{o} \quad A=4$$

Analogamente, moltiplicando ambedue i membri della (*1*) per $s+1$ e ponendo $s\to -1$, si ha

$$\lim_{s\to -1}\frac{3s+7}{s-3} = \lim_{s\to -1}\frac{A(s+1)}{s-3} + B \quad \text{o} \quad B=-1$$

Usando questi valori si ha il risultato del procedimento 1. Si veda anche il problema 7(*c*), pag. 50.

25. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

Si ha

$$\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{s-3} \qquad (1)$$

Si usa il procedimento 2 del problema 24.

Moltiplicare ambedue i membri della (*1*) per $s+1$ e porre $s\to -1$; allora

$$A = \lim_{s\to -1}\frac{2s^2-4}{(s-2)(s-3)} = -\frac{1}{6}$$

Moltiplicare ambedue i membri della (*1*) per $s-2$ e porre $s\to 2$; allora

$$B = \lim_{s\to 2}\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-3)} = -\frac{4}{3}$$

Moltiplicare ambedue i membri della (*1*) per $s-3$ e porre $s\to 3$; allora

$$C = \lim_{s\to 3}\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)} = \frac{7}{2}$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{s+1}+\frac{-4/3}{s-2}+\frac{7/2}{s-3}\right\} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

Si può usare anche il procedimento 1 del problema 24. Tuttavia si può osservare che il procedimento indicato è meno noioso. Esso può essere usato dovunque il denominatore ha *fattori lineari distinti*.

26. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$.

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{A}{s+1}+\frac{B}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2} \qquad (1)$$

Per determinare A e B si può usare un procedimento analogo a quello del problema 25.

Moltiplicare entrambi i membri della (*1*) per $s+1$ e porre $s\to -1$; allora

$$A = \lim_{s\to -1}\frac{5s^2-15s-11}{(s-2)^3} = \frac{-1}{3}$$

Moltiplicare entrambi i membri della (*1*) per $(s-2)^3$ e porre $s\to 2$; allora

$$B = \lim_{s\to 2}\frac{5s^2-15s-11}{s+1} = -7$$

Il procedimento non serve invece per determinare C e D. Tuttavia, dato che sono noti A e B, dalla (*1*) si ha

$$\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3} = \frac{-1/3}{s+1}+\frac{-7}{(s-2)^3}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{s-2} \qquad (2)$$

Per determinare C e D si possono introdurre due valori di s, ad es. $s=0$ e $s=1$, da cui si ottiene rispettivamente,

$$\frac{11}{8} = -\frac{1}{3}+\frac{7}{8}+\frac{C}{4}-\frac{D}{2}, \qquad \frac{21}{2} = -\frac{1}{6}+7+C-D$$

cioè $3C-6D=10$ e $3C-3D=11$, da cui $C=4,\ D=1/3$. Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+1}+\frac{-7}{(s-2)^3}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{1/3}{s-2}\right\} = -\frac{1}{3}e^{-t} - \frac{7}{2}t^2e^{2t} + 4t\,e^{2t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Altro procedimento. Moltiplicando entrambi i membri della (2) per s e ponendo $s \to \infty$, si ha $0 = -\frac{1}{3} + D$ che dà $D = 1/3$. Allora C può essere determinato come visto sopra ponendo $s = 0$.

Questo metodo può essere usato quando si hanno alcuni *fattori lineari ripetuti.*

27. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad (1)$$

Moltiplicare entrambi i membri per $s-1$ e porre $s \to 1$; allora $A = \lim_{s\to 1} \dfrac{3s+1}{s^2+1} = 2$ e

$$\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \qquad (2)$$

Per determinare B e C, porre $s = 0$ e 2 (ad es.); allora

$$-1 = -2 + C, \qquad \frac{7}{5} = 2 + \frac{2B+C}{5}$$

da cui $C = 1$ e $B = -2$. Allora si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-2s+1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$= 2e^t - 2\cos t + \sin t$$

Altro procedimento. Moltiplicando entrambi i membri della (2) per s e ponendo $s \to \infty$, si determina immediatamente $B = -2$.

28. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\}$.

Procedimento 1.

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{As+B}{s^2+2s+2} + \frac{Cs+D}{s^2+2s+5} \qquad (1)$$

Moltiplicando per $(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)$,

$$s^2 + 2s + 3 = (As+B)(s^2+2s+5) + (Cs+D)(s^2+2s+2)$$

$$= (A+C)s^3 + (2A+B+2C+D)s^2 + (5A+2B+2C+2D)s + 5B + 2D$$

Allora $A+C = 0$, $2A+B+2C+D = 1$, $5A+2B+2C+2D = 2$, $5B+2D = 3$. Risolvendo $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$. Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s^2+2s+2} + \frac{2/3}{s^2+2s+5}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} + \tfrac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+4}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}\sin t + \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{2}e^{-t}\sin 2t$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

Procedimento 2. Sia nella (1) $s = 0$: $\dfrac{3}{10} = \dfrac{B}{2} + \dfrac{D}{5}$.

Moltiplicando la (1) per s e ponendo $s \to \infty$: $0 = A + C$.

Sia $s = 1$: $\dfrac{3}{20} = \dfrac{A+B}{5} + \dfrac{C+D}{8}$.

Sia $s = -1$: $\dfrac{1}{2} = -A + B + \dfrac{D-C}{4}$

Risolvendo $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{3}$ come nel procedimento 1.

Ciò esemplifica il caso dei *fattori quadratici non ripetuti.*

Procedimento 3. Dato che $s^2+2s+2 = 0$ per $s = -1 \pm i$, si può scrivere

$$s^2 + 2s + 2 = (s+1-i)(s+1+i)$$

Analogamente

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1-2i)(s+1+2i)$$

Allora

$$\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{s^2+2s+3}{(s+1-i)(s+1+i)(s+1-2i)(s+1+2i)}$$

$$= \frac{A}{s+1-i} + \frac{B}{s+1+i} + \frac{C}{s+1-2i} + \frac{D}{s+1+2i}$$

Risolvendo per A, B, C, D, si ha $A = 1/6i$, $B = -1/6i$, $C = 1/6i$, $D = -1/6i$. Quindi l'antitrasformata di Laplace cercata è

$$\frac{e^{-(1-i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+i)t}}{6i} + \frac{e^{-(1-2i)t}}{6i} - \frac{e^{-(1+2i)t}}{6i} = \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) + \tfrac{1}{3}e^{-t}\left(\frac{e^{2it}-e^{-2it}}{2i}\right)$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}\sin t + \tfrac{1}{3}e^{-t}\sin 2t$$

$$= \tfrac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

Ciò dimostra che il caso dei fattori quadratici non ripetuti può essere ridotto al caso dei fattori lineari non ripetuti usando i numeri complessi.

FORMULA DELLO SVILUPPO DI HEAVISIDE

29. Dimostrare la formula dello sviluppo di Heaviside (14), pag. 46.

Dato che $Q(s)$ è un polinomio con n zeri distinti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, in base al metodo delle frazioni parziali si può scrivere

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s-\alpha_1} + \frac{A_2}{s-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_k}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{A_n}{s-\alpha_n} \qquad (1)$$

Moltiplicando entrambi i membri per $s - \alpha_k$ e ponendo $s \to \alpha_k$, usando la regola di L'Hospital si ha

$$A_k = \lim_{s\to\alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)}(s-\alpha_k) = \lim_{s\to\alpha_k} P(s)\left\{\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right\}$$

$$= \lim_{s\to\alpha_k} P(s) \lim_{s\to\alpha_k}\left(\frac{s-\alpha_k}{Q(s)}\right) = P(\alpha_k)\lim_{s\to\alpha_k}\frac{1}{Q'(s)} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$$

Quindi la (1) può essere scritta nella forma

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}\frac{1}{s-\alpha_1} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\frac{1}{s-\alpha_k} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}\frac{1}{s-\alpha_n}$$

Allora, prendendo l'antitrasformata di Laplace, si ha, come richiesto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \frac{P(\alpha_1)}{Q'(\alpha_1)}e^{\alpha_1 t} + \cdots + \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t} + \cdots + \frac{P(\alpha_n)}{Q'(\alpha_n)}e^{\alpha_n t} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$$

30. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right\}$.

Si ha $P(s) = 2s^2-4$, $Q(s) = (s+1)(s-2)(s-3) = s^3-4s^2+s+6$, $Q'(s) = 3s^2-8s+1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$. Allora l'antitrasformata richiesta per il problema 29 è

$$\frac{P(-1)}{Q'(-1)}e^{-t} + \frac{P(2)}{Q'(2)}e^{2t} + \frac{P(3)}{Q'(3)}e^{3t} = \frac{-2}{12}e^{-t} + \frac{4}{-3}e^{2t} + \frac{14}{4}e^{3t} = -\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{4}{3}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{3t}$$

Confrontare con il problema 25.

31. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right\}$.

Si ha $P(s) = 3s+1$, $Q(s) = (s-1)(s^2+1) = s^3-s^2+s-1$, $Q'(s) = 3s^2-2s+1$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = i$, $\alpha_3 = -i$ dato che $s^2+1 = (s-i)(s+i)$. Allora per la formula dello sviluppo di Heaviside l'antitrasformata richiesta è

$$\frac{P(1)}{Q'(1)}e^{t} + \frac{P(i)}{Q'(i)}e^{it} + \frac{P(-i)}{Q'(-i)}e^{-it} \qquad (1)$$

$$= \frac{4}{2}e^{t} + \frac{3i+1}{-2-2i}e^{it} + \frac{-3i+1}{-2+2i}e^{-it}$$

$$= 2e^{t} + (-1-\tfrac{1}{2}i)(\cos t + i\sin t) + (-1+\tfrac{1}{2}i)(\cos t - i\sin t)$$

$$= 2e^{t} - \cos t + \tfrac{1}{2}\sin t - \cos t + \tfrac{1}{2}\sin t$$

$$= 2e^{t} - 2\cos t + \sin t$$

Confrontare con il problema 27.

Si noti che si può risparmiare una parte del lavoro sfruttando il fatto che gli ultimi due termini della (*1*) sono l'uno il complesso coniugato dell'altro.

LA FUNZIONE BETA

32. Dimostrare che $B(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ dove $m>0$, $n>0$.

Si consideri che

$$G(t) = \int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx$$

Allora per il teorema della convoluzione, si ha

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{t^{m-1}\}\,\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{\Gamma(m)}{s^m}\cdot\frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}$$

Quindi

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{s^{m+n}}\right\} = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

o

$$\int_0^t x^{m-1}(t-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\,t^{m+n-1}$$

Posto $t = 1$, si ottiene il risultato voluto.

33. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2}B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{2\,\Gamma(m+n)}$

Dal problema 32, si ha

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Posto $x = \sin^2\theta$, questa diventa

$$B(m,n) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\,\cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

da cui il risultato desiderato.

34. Calcolare (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^4\theta\,d\theta$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$.

(*a*) Sia $2m-1 = 4$, $2n-1 = 6$ nel problema 33. Allora $m = 5/2$, $n = 7/2$, e si ha

$$\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\cos^6\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(7/2)}{2\,\Gamma(6)} = \frac{(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}\cdot(5/2)(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{3\pi}{512}$$

(*b*) Dato che $\cos\theta$ è simmetrico rispetto a $\theta = \pi/2$, si ha

$$\int_0^{\pi}\cos^4\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

Allora posto $2m-1 = 0$ e $2n-1 = 4$, cioè $m = 1/2$ e $n = 5/2$ nel problema 33, si ha

$$2\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = 2\left[\frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(5/2)}{2\,\Gamma(3)}\right] = 2\left[\frac{\sqrt{\pi}\cdot(3/2)(1/2)\sqrt{\pi}}{2\cdot2\cdot1}\right] = \frac{3\pi}{8}$$

(*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \int_0^{\pi/2}\sin^{-1/2}\theta\,\cos^{1/2}\theta\,d\theta$

Posto nel problema 33 $2m-1 = -1/2$ e $2n-1 = 1/2$, o $m = 1/4$ e $n = 3/4$, si ha

$$\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} = \frac{\Gamma(1/4)\,\Gamma(3/4)}{2\,\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\sin(\pi/4)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

dove si è sfruttata la relazione $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \pi/(\sin p\pi)$, $0 < p < 1$.

CALCOLO DI INTEGRALI

35. Calcolare $\displaystyle\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$.

Sia $G(t) = \displaystyle\int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du$. Allora per il teorema della convoluzione,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \mathcal{L}\{J_0(t)\}\,\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$

Quindi

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \sin t$$

e perciò

$$G(t) = \int_0^t J_0(u)\,J_0(t-u)\,du = \sin t$$

36. Dimostrare che $\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

Sia $G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2\,dx$. Allora prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{G(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \int_0^\infty \cos tx^2\,dx \\ &= \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-st}\cos tx^2\,dt \\ &= \int_0^\infty \mathcal{L}\{\cos tx^2\}\,dx = \int_0^\infty \frac{s}{s^2+x^4}\,dx\end{aligned}$$

Posto $x^2 = s\tan\theta$ o $x = \sqrt{s}\sqrt{\tan\theta}$, usando il problema 34(*c*) l'integrale diventa

$$\frac{1}{2\sqrt{s}}\int_0^{\pi/2}(\tan\theta)^{-1/2}\,d\theta = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4\sqrt{s}}$$

Invertendo si ha

$$G(t) = \int_0^\infty \cos tx^2\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) = \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}t^{-1/2}$$

Posto $t = 1$ si ha, come richiesto,

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

PROBLEMI VARI

37. Dimostrare che $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Si consideri che $G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx$. Allora prendendo la trasformata di Laplace,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \int_0^\infty \frac{dx}{s+x^2} = \frac{1}{\sqrt{s}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{s}}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{s}}$$

Quindi invertendo,

$$G(t) = \int_0^\infty e^{-tx^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,t^{-1/2}$$

e ponendo $t = 1$ si ottiene il risultato cercato.

Altro procedimento.

Posto $x^2 = u$ o $x = \sqrt{u}$, l'integrale richiesto diventa

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Ma per il problema 32 con $m = n = \frac{1}{2}$, si ha

$$\begin{aligned}\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\}^2 &= \int_0^1 x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x)^2}} = \sin^{-1}(1-2x)\bigg|_0^1 = \pi\end{aligned}$$

Quindi $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ e perciò l'integrale richiesto vale $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Si veda anche il problema 29, pag. 22.

38. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\}$.

Si ha (v. problema 34, pag. 23) $\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$. Derivando rispetto ad a si ha

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}\{J_0(at)\} = \frac{d}{da}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\} \quad \text{o} \quad \mathcal{L}\left[\frac{d}{da}\{J_0(at)\}\right] = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

cioè

$$\mathcal{L}\{t\,J_0'(at)\} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

Quindi

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}\right\} = -\frac{t}{a}J_0'(at) = \frac{t\,J_1(at)}{a}$$

dato che $J_0'(u) = -J_1(u)$.

39. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+2s+5)^{3/2}}\right\}$.

L'antitrasformata richiesta può essere scritta nella forma

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[(s+1)^2+4]^{3/2}}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+4)^{3/2}}\right\} = \frac{te^{-t}}{2}J_1(2t)$$

sfruttando il problema 38.

40. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\}$.

Usando le serie, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}e^{-1/s} &= \frac{1}{s}\left\{1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!\,s^2}-\frac{1}{3!\,s^3}+\cdots\right\} \\ &= \frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!\,s^3}-\frac{1}{3!\,s^4}+\cdots\end{aligned}$$

Invertendo termine per termine,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s}e^{-1/s}\right\} &= 1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\cdots \\ &= 1-t+\frac{t^2}{1^2\,2^2}-\frac{t^3}{1^2\,2^2\,3^2}+\cdots \\ &= 1-\frac{(2t^{1/2})^2}{2^2}+\frac{(2t^{1/2})^4}{2^2\,4^2}-\frac{(2t^{1/2})^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\cdots \\ &= J_0(2\sqrt{t})\end{aligned}$$

41. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$.

Sia $y = e^{-\sqrt{s}}$; allora $y' = -\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2s^{1/2}}$, $y'' = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s}+\frac{e^{-\sqrt{s}}}{4s^{3/2}}$. Quindi

$$4s\,y''+2y'-y = 0 \tag{1}$$

Ora $y'' = \mathcal{L}\{t^2Y\}$ per cui $sy'' = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}[t^2Y]\right\} = \mathcal{L}\{t^2Y'+2tY\}$. E' anche $y' = \mathcal{L}\{-tY\}$.
Quindi la (*1*) può essere scritta nella forma

$$4\mathcal{L}\{t^2Y'+2tY\} - 2\mathcal{L}\{tY\} - \mathcal{L}\{Y\} = 0 \qquad \text{o} \qquad 4t^2Y' + (6t-1)Y = 0$$

che a sua volta può essere scritta nella forma

$$\frac{dY}{Y} + \left(\frac{6t-1}{4t^2}\right)dt = 0 \qquad \text{o} \qquad \ln Y + \frac{3}{2}\ln t + \frac{1}{4t} = c_1$$

cioè

$$Y = \frac{c}{t^{3/2}}e^{-1/4t}$$

Ora $tY = \frac{c}{t^{1/2}}e^{-1/4t}$. Quindi

$$\mathcal{L}\{tY\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{Y\} = -\frac{d}{ds}(e^{-\sqrt{s}}) = \frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}}$$

Per valori elevati di t, $tY \sim \frac{c}{t^{1/2}}$ e $\mathcal{L}\{tY\} \sim \frac{c\sqrt{\pi}}{s^{1/2}}$. Per valori piccoli di s, $\frac{e^{-\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} \sim \frac{1}{2s^{1/2}}$. Quindi per il teorema del valore finale $c\sqrt{\pi} = 1/2$ o $c = 1/2\sqrt{\pi}$. Ne segue che

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-1/4t}$$

Altro procedimento. Usando le serie, formalmente si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 - s^{1/2} + \frac{s}{2!} - \frac{s^{3/2}}{3!} + \frac{s^2}{4!} - \frac{s^{5/2}}{5!} + \cdots\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\{1\} - \mathcal{L}\{s^{1/2}\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{2!}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^{3/2}}{3!}\right\} + \cdots \qquad (1)$$

Sfruttando il risultato del problema 170, pag. 40 (v. anche problema 33, pag. 22) per $p = 0$ o ad un numero intero positivo qualsiasi si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\{s^{p+1/2}\} = \frac{t^{-p-3/2}}{\Gamma(-p-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\cdots\left(\frac{2p+1}{2}\right)t^{-p-3/2} \qquad (2)$$

mentre $\mathcal{L}^{-1}\{s^p\} = 0$. Allora dalla (*1*) usando la (*2*) si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\frac{t^{-5/2}}{3!\sqrt{\pi}} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\frac{t^{-7/2}}{5!\sqrt{\pi}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\left\{1 - \left(\frac{1}{2^2t}\right) + \frac{(1/2^2t)^2}{2!} - \frac{(1/2^2t)^3}{3!} + \cdots\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-1/4t}$$

42. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

Dai problemi 41 e 15 si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s}}}{s}\right\} = \int_0^t \left\{\frac{1}{2\sqrt{\pi}\,u^{3/2}}e^{-1/4u}\right\}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{1/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv \qquad (\text{posto } u = 1/4v^2)$$

$$= \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

43. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\}$.

Nel problema 42 sfruttare la proprietà del cambio di scala (*4*), pag. 44, con $k = x^2$. Allora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{x^2s}}}{x^2s}\right\} = \frac{1}{x^2}\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t/x^2}}\right)$$

da cui

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{s}\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

Si noti che questo corrisponde al caso 87 della tabella di pag. 250.

44. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\}$.

Dato che $\frac{1}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+9}\right)$, si ha

$$\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2} - \frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2+9}\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\left(2s + 10 + \frac{8}{s} + \frac{40}{s^2}\right) - \left(2s + 10 + \frac{-10s-50}{s^2+9}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{9}\left\{\frac{8}{s} + \frac{40}{s^2} + \frac{10s}{s^2+9} + \frac{50}{s^2+9}\right\}$$

e perciò

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3+10s^2+8s+40}{s^2(s^2+9)}\right\} = \frac{1}{9}\left(8 + 40t + 10\cos 3t + \frac{50}{3}\sin 3t\right)$$

$$= \frac{1}{27}(24 + 120t + 30\cos 3t + 50\sin 3t)$$

Si può usare anche il metodo delle frazioni parziali.

45. Dimostrare che $J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\,dw$.

Si ha (v. problema 34, pag. 23),

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Ora

$$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}$$

Sfruttando il fatto che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+a}}\right\} = \frac{t^{-1/2}e^{-at}}{\sqrt{\pi}}$, per il teorema della convoluzione si ha

$$J_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s+i}}\cdot\frac{1}{\sqrt{s-i}}\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{u^{-1/2}e^{-iu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{(t-u)^{-1/2}e^{i(t-u)}}{\sqrt{\pi}}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t e^{i(t-2u)}\,u^{-1/2}(t-u)^{-1/2}\,du$$

Posto $u = tv$ questa diventa

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 e^{it(1-2v)}\, v^{-1/2}(1-v)^{-1/2}\, dv$$

o se $1 - 2v = w$,

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^1 e^{itw}(1-w^2)^{-1/2}\, dw$$

46. Dimostrare che $J_0(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta$.

Sia nel risultato del problema 45 $w = \cos\theta$. Allora

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{it\cos\theta}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta + \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \sin(t\cos\theta)\, d\theta$$

Eguagliando le parti reali e le parti immaginarie tra loro o dimostrando direttamente che l'ultimo integrale è nullo, si ottiene, come richiesto,

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta$$

Altro procedimento.
Sia $G(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos(t\cos\theta)\, d\theta = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t\cos\theta)\, d\theta$. Allora prendendo le trasformate di Laplace,

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{s}{s^2+\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{s\sec^2\theta}{s^2\tan^2\theta + s^2 + 1}\, d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\tan^{-1}\left(\frac{s\tan\theta}{\sqrt{s^2+1}}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$$

Quindi $G(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_0(t)$, come volevasi dimostrare.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

47. Determinare ognuna delle seguenti antitrasformate:

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3}{s+4}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s}{s^2+16}\right\}$ (e) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-12}{s^2+8}\right\}$ (g) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^5}\right\}$ (i) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{12}{4-3s}\right\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{2s-5}\right\}$ (d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2+4}\right\}$ (f) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-5}{s^2-9}\right\}$ (h) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^{7/2}}\right\}$ (j) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{s^{4/3}}\right\}$

Risp.
(a) $3e^{-4t}$ (e) $3\cos 2\sqrt{2}\,t - 3\sqrt{2}\sin 2\sqrt{2}\,t$ (i) $-4e^{4t/3}$
(b) $\frac{1}{2}e^{5t/2}$ (f) $2\cosh 3t - \frac{5}{2}\sinh 3t$ (j) $(t^{-2/3} + 3t^{1/3})/\Gamma(\frac{1}{3})$
(c) $8\cos 4t$ (g) $t^4/24$
(d) $3\sin 2t$ (h) $8t^{5/2}/15\sqrt{\pi}$

48. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\dfrac{\sqrt{s}-1}{s}\right)^2\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+1}{s(s+1)}\right\}$.

Risp. (a) $1 + t - 4t^{1/2}/\sqrt{\pi}$ (b) $1 + e^{-t}$

49. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{4s^2+25}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s+10}{9s^2-16}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{3}{4}\cos 5t/2 - \frac{4}{5}\sin 5t/2$ (b) $\frac{5}{9}\cosh 4t/3 + \frac{5}{6}\sinh 4t/3$

50. (a) Dimostrare che le funzioni $F(t) = \begin{cases} t & t \neq 3 \\ 5 & t = 3 \end{cases}$ e $G(t) = t$ hanno le stesse trasformate di Laplace.

(b) Discutere il significato del risultato ottenuto in (a) in relazione alla unicità della antitrasformata di Laplace.

51. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-8}{s^2+4} - \dfrac{4s-24}{s^2-16}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-2}{s^{5/2}} - \dfrac{7}{3s+2}\right\}$.

Risp. (a) $3\cos 2t - 4\sin 2t - 4\cosh 4t + 6\sinh 4t$
(b) $6t^{1/2}/\sqrt{\pi} - 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - \frac{7}{3}e^{-2t/3}$

52. (a) Se $F_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\}$, $F_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\}$, $F_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f_3(s)\}$, e c_1, c_2, c_3 sono costanti qualsiasi, dimostrare che

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s) + c_3 f_3(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) + c_3 F_3(t)$$

specificando le restrizioni del caso. (b) Generalizzare il risultato della parte (a) al caso di n funzioni.

53. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3(s^2-1)^2}{2s^5} + \dfrac{4s-18}{9-s^2} + \dfrac{(s+1)(2-s^{1/2})}{s^{5/2}}\right\}$.

Risp. $\frac{1}{2} - t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{16}t^4 + 4t^{1/2}/\sqrt{\pi} + 8t^{3/2}/3\sqrt{\pi} - 4\cosh 3t + 6\sinh 3t$

54. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^5}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^{5/2}}\right\}$.

Risp. (a) $\dfrac{e^{-t}}{24}(4t^3 - t^4)$, (b) $\dfrac{2t^{1/2}(3-2t)}{3\sqrt{\pi}}$

55. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s-14}{s^2-4s+8}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8s+20}{s^2-12s+32}\right\}$.

Risp. (a) $e^{2t}(3\cos 2t - 4\sin 2t)$, (b) $2e^{6t}(4\cosh 2t + 7\sinh 2t) = 11e^{8t} - 3e^{4t}$

56. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{4s^2+12s+9}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{5s-2}{3s^2+4s+8}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{3}{4}e^{-3t/2} - \frac{5}{8}t\,e^{-3t/2}$, (b) $\dfrac{e^{-2t/3}}{15}\{25\cos 2\sqrt{5}\,t/3 - 24\sqrt{5}\sin 2\sqrt{5}\,t/3\}$

57. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{8s-27}}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s^2-4s+20}}\right\}$.

Risp. (a) $t^{-2/3}e^{27t/8}/2\,\Gamma(\frac{1}{3})$, (b) $e^{2t}J_0(4t)$

58. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{s^2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{8e^{-3s}}{s^2+4}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{\sqrt{s+1}}\right\}$.

Risp. (a) $\begin{cases} t-2 & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $(t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$. (b) $\begin{cases} 4\sin 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ o $4\sin 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$.

(c) $\begin{cases} (t-1)^{-1/2}/\sqrt{\pi} & t>1 \\ 0 & t<1 \end{cases}$ o $(t-1)^{-1/2}\,\mathcal{U}(t-1)/\sqrt{\pi}$.

59. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{se^{-2s}}{s^2+3s+2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-3s}}{s^2-2s+5}\right\}$.

Risp. (a) $\begin{cases} 2e^{-2(t-2)}-e^{-(t-2)} & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $\{2e^{-2(t-2)}-e^{-(t-2)}\}\,\mathcal{U}(t-2)$

(b) $\begin{cases} \frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3) & t>3 \\ 0 & t<3 \end{cases}$ o $\frac{1}{2}e^{(t-3)}\sin 2(t-3)\,\mathcal{U}(t-3)$

60. Se $\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt = f(s)$ e $\int_0^\infty e^{-st}G(t)\,dt = f(ps+q)$, dove p e q sono costanti, determinare la relazione esistente tra $F(t)$ e $G(t)$. *Risp.* $G(t) = e^{-qt/p}F(t/p)/p$

61. Se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{erf}\sqrt{t}$, determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}\right\}$, $a>0$. *Risp.* $\operatorname{erf}\sqrt{at}/\sqrt{a}$

62. Se $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}\right\} = J_n(t)$, determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$. *Risp.* $a^n J_n(at)$

63. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-2s}}{\sqrt{s^2+9}}\right\}$.

Risp. (a) $e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$, (b) $\begin{cases} J_0(3t-6) & t>2 \\ 0 & t<2 \end{cases}$ o $J_0(3t-6)\,\mathcal{U}(t-2)$

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE DI DERIVATE E INTEGRALI

64. Usare il *teorema 2-6*, pag. 44, per determinare

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^3\}$ posto che sia $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$,

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{s/(s^2-a^2)^2\}$ posto che sia $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2-a^2)\} = (\sinh at)/a$.

65. Sfruttare il fatto che $\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ per determinare $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^n\}$ dove $n = 2,3,4,\ldots$. Determinare quindi $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-a)^n\}$.

66. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+1}{(s^2+2s+2)^2}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}te^{-t}\sin t$

67. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+2}{s+1}\right)\right\}$.

Risp. (a) $(e^{-t}-e^{-2t})/t$, (b) $\int_0^t \dfrac{e^{-u}-e^{-2u}}{u}\,du$

68. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(2/s^2)\}$. *Risp.* $2\sin t \sinh t/t$

69. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)\right\}$. *Risp.* $\int_0^t \dfrac{\cos au - \cos bu}{u}\,du$

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE PER POTENZE DI s

70. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{f(s)}{s^3}\right\} = \int_0^t\int_0^v\int_0^w F(u)\,du\,dv\,dw$.

Si può scrivere l'integrale nella forma $\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^3$? Spiegare.

71. Calcolare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3(s+1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+2}{s^2(s+3)}\right\}$, (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s+1)^3}\right\}$.

Risp. (a) $1-t+\frac{1}{2}t^2-e^{-t}$, (b) $\frac{2}{3}t+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}e^{-3t}$, (c) $1-e^{-t}(1+t+\frac{1}{2}t^2)$

72. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s+4}}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s\sqrt{s^2+a^2}}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{1}{2}\operatorname{erf}(2\sqrt{t})$, (b) $\int_0^t J_0(au)\,du$

73. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)^5(s+2)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s-2)^5(s+1)}\right\}$ e discutere la relazione esistente tra le antitrasformate.

Risp. (a) $\dfrac{e^t}{72}\left(t^4-\dfrac{4}{3}t^3+\dfrac{4}{3}t^2-\dfrac{8}{9}t+\dfrac{8}{27}\right)-\dfrac{e^{-2t}}{243}$

(b) $e^{2t}\left(\dfrac{t^4}{36}+\dfrac{t^3}{54}-\dfrac{t^2}{54}+\dfrac{t}{81}-\dfrac{1}{243}\right)+\dfrac{e^{-t}}{243}$

74. Se $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$, dimostrare che

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f'(s)\} = -t\,F'(t)-F(t)$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f''(s)\} = t^2F'(t)+2t\,F(t)$

(c) $\mathcal{L}^{-1}\{s^2 f''(s)\} = t^2F''(t)+4t\,F'(t)+2\,F(t)$

75. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\{s^2f'(s)+F(0)\} = -t\,F''(t)-2\,F'(t)$.

IL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

76. Usare il teorema della convoluzione per determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+3)(s-1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+2)^2(s-2)}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{1}{4}(e^t-e^{-3t})$, (b) $\frac{1}{16}(e^{2t}-e^{-2t}-4te^{-2t})$

77. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}(\sin t-\cos t+e^{-t})$

78. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}t\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t$

79. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+4)^3}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t-3t\cos t\}$, (b) $\frac{1}{64}t(\sin 2t-2t\cos 2t)$

80. Dimostrare che $F*\{G*H\} = \{F*G\}*H$, cioè la *legge associativa* delle convoluzioni.

81. Dimostrare che (a) $F*\{G+H\} = F*G + F*H$, (b) $\{F+G\}*H = F*H + G*H$.

82. Dimostrare che $1*1*1*\ldots*1$ (in numero di n) $= t^{n-1}/(n-1)!$ dove $n = 1, 2, 3, \ldots$.

83. Dimostrare che $\int_0^t\int_0^t\int_0^t F(t)\,dt^3 = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}F(u)\,du$.

84. Dimostrare che $\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t F(t)\,dt^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}F(u)\,du$.

85. Dimostrare direttamente il teorema della convoluzione mostrando che

$$\begin{aligned} f(s)\,g(s) &= \left\{\int_0^\infty e^{-su}F(u)\,du\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sv}G(v)\,dv\right\} \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}F(u)\,G(v)\,du\,dv \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du\right\}dt. \end{aligned}$$

86. Usando il teorema della convoluzione, verificare che

$$\int_0^t \sin u \cos(t-u)\,du = \tfrac{1}{2}t\sin t$$

87. Dimostrare che $\frac{1}{\pi}\int_0^t \frac{e^{(a-b)u}}{\sqrt{u(t-u)}}\,du = e^{(a-b)t/2}\,I_0\{\tfrac{1}{2}(a-b)t\}$.

FRAZIONI PARZIALI

88. Usare le frazioni parziali per determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+16}{s^2-s-6}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{s^3-s}\right\}$.

Risp. (a) $5e^{3t} - 2e^{-2t}$, (b) $1 - \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{t}$

89. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{6s^2+7s+2}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{11s^2-2s+5}{(s-2)(2s-1)(s+1)}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{1}{2}e^{-t/2} - \frac{1}{3}e^{-2t/3}$, (b) $5e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t/2} + 2e^{-t}$

90. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{27-12s}{(s+4)(s^2+9)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^3+16s-24}{s^4+20s^2+64}\right\}$.

Risp. (a) $3e^{-4t} - 3\cos 3t$, (b) $\frac{1}{2}\sin 4t + \cos 2t - \sin 2t$

91. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{5}e^{-t}(4\cos t - 3\sin t) - \frac{4}{5}e^{-3t}$

92. Determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-2s+3}{(s-1)^2(s+1)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^3-3s^2-40s+36}{(s^2-4)^2}\right\}$.

Risp. (a) $\frac{1}{2}(2t-1)e^{t} + \frac{3}{2}e^{-t}$, (b) $(5t+3)e^{-2t} - 2te^{2t}$

93. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$

Risp. $\frac{3}{50}e^{3t} - \frac{1}{25}e^{-2t} - \frac{1}{50}e^{-t}\cos 2t + \frac{9}{25}e^{-t}\sin 2t$

94. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$ *Risp.* $\frac{1}{2}\sin t \sinh t$

95. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - te^{-t}$

96. Usare le frazioni parziali per risolvere (a) il problema 44, (b) il problema 71, (c) il problema 73, (d) il problema 76, (e) il problema 77.

97. E' possibile risolvere con le frazioni parziali i problemi 79(a) e 79(b)? Spiegare.

FORMULA DELLO SVILUPPO DI HEAVISIDE

98. Usando la formula dello sviluppo di Heaviside determinare (a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-11}{(s+2)(s-3)}\right\}$, (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{19s+37}{(s-2)(s+1)(s+3)}\right\}$.

Risp. (a) $3e^{-2t} - e^{3t}$, (b) $5e^{2t} - 3e^{-t} - 2e^{-3t}$

99. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2-6s+5}{s^3-6s^2+11s-6}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{5}{2}e^{3t}$

100. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+5}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$. *Risp.* $2e^{-t} + 3\sin t - 2\cos t$

101. Usare la formula dello sviluppo di Heaviside per risolvere (a) il problema 76(a), (b) il problema 77, (c) il problema 88, (d) il problema 89, (e) il problema 90.

102. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+3)(s^2+2s+2)}\right\}$. Confrontare con il problema 91.

103. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-3}{(s+2)(s-3)(s^2+2s+5)}\right\}$. Confrontare con il problema 93.

104. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+2)}\right\}$. Confrontare con il problema 94.

105. Si supponga che $f(s) = P(s)/Q(s)$ dove $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi come nel caso del problema 29 ma l'equazione $Q(s) = 0$ ha una radice a di molteplicità m mentre le altre radici, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sono semplici.

(a) Dimostrare che

$$f(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{(s-a)^m} + \frac{A_2}{(s-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_m}{s-a} + \frac{B_1}{s-b_1} + \frac{B_2}{s-b_2} + \cdots + \frac{B_n}{s-b_n}$$

(b) Dimostrare che $A_k = \lim_{s\to a}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^k}{ds^k}\{(s-a)^m f(s)\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

(c) Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = e^{at}\left\{\frac{A_1 t^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{A_2 t^{m-2}}{(m-2)!} + \cdots + A_m\right\} + B_1 e^{b_1 t} + \cdots + B_n e^{b_n t}$.

106. Usare il problema 105 per determinare (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2-9s+19}{(s-1)^2(s+3)}\right\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)^2}\right\}$.

Risp. (*a*) $(3t-2)e^t + 4e^{-3t}$, (*b*) $t(e^{-t}-e^{-2t})$

107. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{11s^3-47s^2+56s+4}{(s-2)^3(s+2)}\right\}$. *Risp.* $(2t^2-t+5)e^{2t} + 6e^{-2t}$

108. Sfruttare il problema 105 per risolvere (*a*) il problema 26, (*b*) il problema 44, (*c*) il problema 71, (*d*) il problema 73, (*e*) il problema 76(*b*).

109. Si può usare il procedimento seguito nel problema 105 per risolvere i problemi 79(*a*) e 79(*b*)? Spiegare.

110. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^3-s^2-1}{(s+1)^2(s^2+1)^2}\right\}$ usando il problema 105. Confrontare con il problema 95.

111. Trovare una formula di sviluppo di Heaviside che sia applicabile nel caso di fattori quadratici multipli.

112. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{4s^4+5s^3+6s^2+8s+2}{(s-1)(s^2+2s+2)^2}\right\}$ usando il metodo trovato nel problema 111.

Risp. $e^t + e^{-t}\{(3-2t)\cos t - 3\sin t\}$

LA FUNZIONE BETA

113. Calcolare ognuno dei seguenti integrali: (*a*) $\displaystyle\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^2\,dx$, (*b*) $\displaystyle\int_0^4 x^3(4-x)^{-1/2}\,dx$, (*c*) $\displaystyle\int_0^2 y^4\sqrt{4-y^2}\,dy$

Risp. (*a*) 16/315, (*b*) 4096/35, (*c*) 2π

114. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi/4$.

115. Calcolare ognuno dei seguenti integrali (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\,d\theta$, (*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\cos^4\theta\,d\theta$, (*c*) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^4\theta\cos^4\theta\,d\theta$.

Risp. (*a*) $5\pi/32$, (*b*) $\pi/32$, (*c*) $3\pi/128$

116. Dimostrare che

$$\int_0^{\pi/2}\sin^p\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos^p\theta\,d\theta = \begin{cases} (a) \quad \dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(p-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots p}\dfrac{\pi}{2} & \text{se } p \text{ è un numero intero positivo pari} \\[2ex] (b) \quad \dfrac{2\cdot4\cdot6\cdots(p-1)}{1\cdot3\cdot5\cdots p} & \text{se } p \text{ è un numero intero positivo dispari} \end{cases}$$

117. Posto che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, dimostrare che $\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin p\pi}$ dove $0<p<1$.

[*Suggerimento*. Porre $x/(1+x) = y$.]

118. Sfruttare il problema 117 per dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{y^2\,dy}{1+y^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

119. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sqrt{\tan\theta}\,d\theta = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

CALCOLO DI INTEGRALI

120. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi/2}$.

121. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. *Risp.* $\pi/2$

122. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty x\cos x^3\,dx = \frac{\pi}{3\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)}$.

123. Dimostrare che se $0<p<1$, (*a*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\sin(p\pi/2)}$

(*b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\,\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}$.

124. Sfruttare il risultato ottenuto nel problema 123 per verificare i risultati dei problemi 120, 121 e 122.

125. (*a*) Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx$ converge.

(*b*) Se $t>0$, è $\mathcal{L}\left\{\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-tx^2}\,dx\right\} = \displaystyle\int_0^\infty \mathcal{L}\{x^2e^{-tx^2}\}\,dx$?

(*c*) Si può usare il procedimento seguito per il problema 37 per calcolare l'integrale dato in (*a*)? Spiegare.

126. Calcolare $\displaystyle\int_0^t J_0(u)\,J_1(t-u)\,du$. *Risp.* $J_0(t) - \cos t$

PROBLEMI VARI

127. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+1}\right\}$. *Risp.* $\dfrac{1}{3}\left\{e^{-t} - e^{t/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\}$

128. Dimostrare che $\displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\,dx = (b-a)^{p+q+1}B(p+1,q+1)$ dove $p>-1$, $q>-1$ e $b>a$.

[*Suggerimento*. Porre $x-a=(b-a)y$.]

129. Calcolare (*a*) $\displaystyle\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(4-x)}}$, (*b*) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt[4]{(5-x)(x-1)}\,dx$. *Risp.* (*a*) π, (*b*) $\dfrac{2\{\Gamma(1/4)\}^2}{3\sqrt{\pi}}$

130. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s(s^2+1)}\right\}$. *Risp.* $\{1-\cos(t-1)\}\,\mathcal{U}(t-1) - \{1-\cos(t-2)\}\,\mathcal{U}(t-2)$

131. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-x\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$.

132. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^t J_0(u)\sin(t-u)\,du = \tfrac{1}{2}t\,J_1(t)$.

133. (*a*) Dimostrare che la funzione $f(s) = \dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s}$ è nulla per un numero infinito di valori complessi di s. Quali sono questi valori? (*b*) Determinare l'antitrasformata di Laplace di $f(s)$.

Risp. (*a*) $s = \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ (*b*) $F(t) = \begin{cases} 1 & t > 2\pi \\ 0 & 0 < t < 2\pi \end{cases}$ o $F(t) = \mathcal{U}(t-2\pi)$

134. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{s+\sqrt{s^2+1}}{2s}\right)\right\}$. *Risp.* $\dfrac{1-J_0(t)}{t}$

135. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^2 u(8-u^3)^{1/3}\,du = \frac{16\sqrt{3}\,\pi}{27}$.

136. Posto $F(t) = t^2$ per tutti i valori irrazionali di t e $F(t) = t$ per tutti i valori razionali di t, (*a*) dimostrare che $\mathcal{L}\{F(t)\} = 2/s^3$, $s > 0$. (*b*) Discutere il significato del risultato di (*a*) in relazione alla unicità della antitrasformata di Laplace.

137. Dimostrare come si può sfruttare il metodo delle serie per calcolare (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s^2+1)\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s)\}$, (*c*) $\mathcal{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

138. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-3s-2\sqrt{s}}\}$. *Risp.* $\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-3)^3}}\,e^{-1/(t-3)}\,\mathcal{U}(t-3)$

139. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{u\sin tu}{1+u^2}\,du = \frac{\pi}{2}e^{-t}$, $t > 0$.

140. Se $F(t) = t^{-1/2}$, $t > 0$ e $G(t) = \begin{cases} t^{-1/2} & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$, dimostrare che

$$F(t) * G(t) = \begin{cases} \pi & 0 < t < 1 \\ \pi - 2\tan^{-1}\sqrt{t-1} & t > 1 \end{cases}$$

141. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s+1}-\sqrt{s}}{\sqrt{s+1}+\sqrt{s}}\right\} = \dfrac{e^{-t/2}\,I_1(t/2)}{t}$.

142. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$. *Risp.* $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} + e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}$

143. Dimostrare che (*a*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t\sin^2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\sin(t/2)\,J_0(t/2)$

(*b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(t\cos^2\theta)\,d\theta = \tfrac{1}{2}\cos(t/2)\,J_0(t/2)$.

144. Posto che $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ abbia periodo $T > 0$ dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)(1-e^{-sT})\} = F(t)$ se $0 < t < T$ e zero se $t > T$.

145. (*a*) Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+1}\right\} = \dfrac{t^2}{2!} - \dfrac{t^5}{5!} + \dfrac{t^8}{8!} - \dfrac{t^{11}}{11!} + \cdots$.

(*b*) Discutere la relazione del risultato di (*a*) con quello del problema 127.

146. Si può applicare la formula di sviluppo di Heaviside alla funzione $f(s) = 1/(s\cosh s)$? Spiegare.

147. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty J_0(x^2)\,dx = 1/4\sqrt{\pi}$.

148. Dimostrare che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\sin\frac{1}{s}\right\} = t - \frac{t^3}{(3!)^2} + \frac{t^5}{(5!)^2} - \frac{t^7}{(7!)^2} + \cdots$$

$$= \frac{i}{2}\{J_0(2e^{\pi i/4}\sqrt{t}) - J_0(2e^{-\pi i/4}\sqrt{t})\}$$

149. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\cos\dfrac{1}{s}\right\} = 1 - \dfrac{t^2}{(2!)^2} + \dfrac{t^4}{(4!)^2} - \dfrac{t^6}{(6!)^2} + \cdots$

150. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1+\sqrt{s}}\right\}$. *Risp.* $t^{-1/2}/\sqrt{\pi} - e^t \operatorname{erfc}(\sqrt{t})$

151. Dimostrare che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+e^{-s}}\right\} = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{(-1)^n (t-n)^n}{n!}$$

dove $[t]$ sta ad indicare il numero intero più grande minore od eguale a t.

152. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}J_0\left(\dfrac{2}{\sqrt{s}}\right)\right\} = 1 - \dfrac{t}{(1!)^3} + \dfrac{t^2}{(2!)^3} - \dfrac{t^3}{(3!)^3} + \cdots$

CAPITOLO 3

Applicazioni alle equazioni differenziali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI COSTANTI

La trasformazione di Laplace è molto utile nella risoluzione di equazioni differenziali lineari ordinarie a coefficienti costanti. Si supponga ad esempio di voler risolvere l'equazione differenziale lineare di secondo grado

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha\frac{dY}{dt} + \beta Y = F(t) \quad \text{o} \quad Y'' + \alpha Y' + \beta Y = F(t) \qquad (1)$$

dove α e β sono costanti dipendenti dalle *condizioni iniziali* o *al contorno*

$$Y(0) = A, \qquad Y'(0) = B \qquad (2)$$

dove A e B sono costanti date. Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri della (*1*) e usando la (*2*), si ottiene una equazione algebrica per la determinazione di $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$. La soluzione richiesta si ottiene quindi determinando l'antitrasformata di Laplace di $y(s)$. Il procedimento può essere facilmente esteso a equazioni differenziali di grado superiore. Si vedano i problemi 1-8.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI VARIABILI

La trasformazione di Laplace può essere utilizzata anche per risolvere alcune equazioni differenziali ordinarie a coefficienti variabili. Una particolare equazione differenziale per la quale questo procedimento risulta utile è quella i cui termini hanno la forma

$$t^m Y^{(n)}(t) \qquad (3)$$

la cui trasformata di Laplace è

$$(-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\} \qquad (4)$$

Si vedano i *teoremi 1-10*, pag. 4, e *1-12*, pag. 5.

Per i dettagli della soluzione v. problemi 9-11.

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

La trasformazione di Laplace viene usata anche per risolvere sistemi di due o più equazioni differenziali ordinarie. Il procedimento è sostanzialmente quello descritto sopra. Si vedano i problemi 12 e 13.

APPLICAZIONI ALLA MECCANICA

Si supponga di avere una massa m connessa ad una molla elastica fissata in O, libera di muoversi sul piano liscio PQ (v. fig. 3-1). Se $X(t)$, o brevemente X, indica lo spostamento di m dalla *posizione di equilibrio* o *di riposo* allo istante t, su m agisce una *forza di richiamo* eguale a $-kX$, dove k è una costante propria della molla, detta *costante della molla*. Ciò deriva dalla *legge di Hooke* che, sulla base dell'esperienza, afferma che la forza esercitata da una molla è proporzionale alla compressione o all'allungamento della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio. In base alla legge di Newton che afferma che la risultante delle forze agenti su m è eguale al prodotto della massa per l'accelerazione, l'equazione di moto è

Fig. 3-1

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \quad \text{o} \quad mX'' + kX = 0 \qquad (5)$$

Se oltre a ciò si ha anche una *forza di smorzamento* proporzionale istante per istante alla velocità di m, l'equazione del moto diventa

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} \quad \text{o} \quad mX'' + \beta X' + kX = 0 \qquad (6)$$

dove la costante di proporzionalità β è detta *costante di smorzamento*.

Una ulteriore modifica dell'equazione interviene se su m agisce anche una qualche data forza esterna $\mathcal{F}(t)$ funzione del tempo. In tal caso l'equazione di moto è

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta\frac{dX}{dt} + \mathcal{F}(t) \quad \text{o} \quad mX'' + \beta X' + kx = \mathcal{F}(t) \qquad (7)$$

Usando le trasformate di Laplace per risolvere le equazioni (*5*), (*6*) e (*7*) sottoposte a varie e appropriate condizioni iniziali di interesse fisico, si può determinare $X(t)$. Si vedano i problemi 14, 15, 27 e 28.

APPLICAZIONI AI CIRCUITI ELETTRICI

Un circuito elettrico semplice (fig. 3-2) è formato dai seguenti *elementi* connessi in *serie* con l'*interuttore* K:

1. un *generatore* o *batteria*, che fornisce una *forza elettromotrice* o *f.e.m.* E (volt),
2. un *resistore* avente *resistenza* R (ohm),
3. un *induttore* avente *induttanza* L (henry),
4. un *capacitore* avente *capacità* C (farad).

Simbolicamente un circuito del genere è rappresentato come indicato in fig. 3-2.

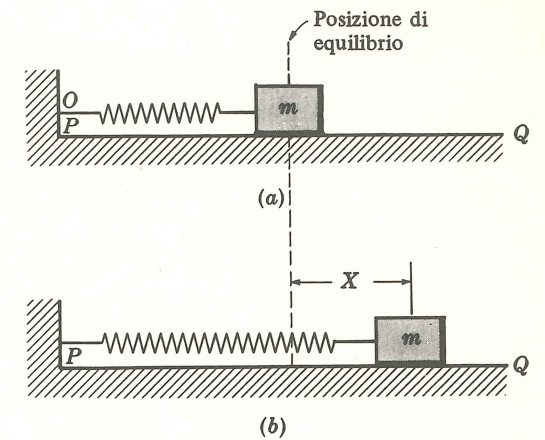
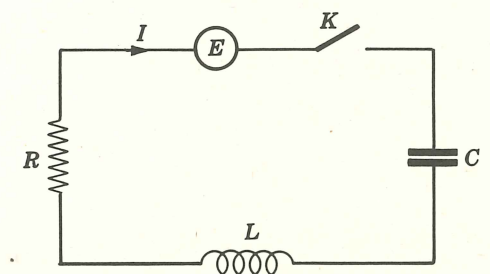



Fig. 3-2

Quando si chiude l'interruttore K in modo da chiudere il circuito, una carica Q (coulomb) va alle armature del capacitore. Il flusso di tale carica, definito da $\frac{dQ}{dt} = I$, è detto *corrente* ed è misurato in ampere se il tempo è misurato in secondi.

In pratica si può aver a che fare con circuiti elettrici più complessi, come quello indicato in fig. 3-3.

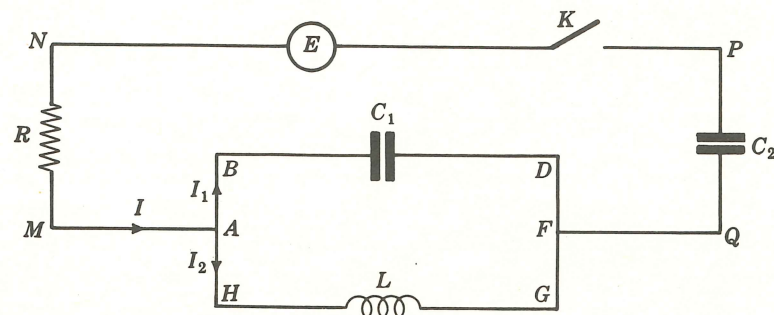



Fig. 3-3

Un problema importante da risolvere per questi circuiti è quello di determinare la carica del capacitore e la corrente in funzione del tempo. A tal fine si introduce la *caduta di potenziale* o di *tensione* attraverso gli elementi del circuito.

(*a*) Caduta di potenziale attraverso un resistore $= RI = R\frac{dQ}{dt}$.

(*b*) Caduta di potenziale attraverso un induttore $= L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2}$.

(*c*) Caduta di potenziale attraverso un capacitore $= \frac{Q}{C}$.

(*d*) Caduta di potenziale attraverso un generatore = —Aumento di potenziale = $-E$.

Le equazioni differenziali necessarie si determinano basandosi sulle due seguenti leggi dovute a Kirchhoff.

Leggi di Kirchhoff

1. La somma algebrica delle correnti che fluiscono verso un nodo qualunque (ad es. A in fig. 3-3) è sempre eguale a zero.
2. La somma algebrica delle cadute di potenziale o voltaggio lungo qualsiasi circuito chiuso (ad es. come $ABDFGHA$ o $ABDFQPNMA$ in fig. 3-3) è eguale a zero.

L'applicazione di tali leggi al semplice circuito di fig. 3-2 è particolarmente semplice (la prima di tali leggi non è neanche necessaria in questo caso). L'equazione per la determinazione di Q è quindi

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E \qquad (8)$$

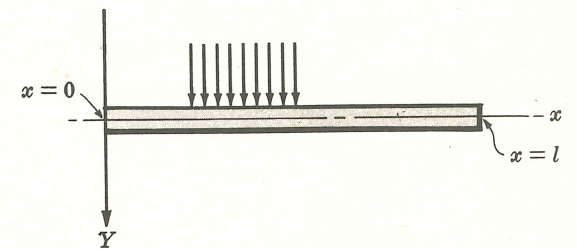
Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito di fig. 3-3 si ottiene un sistema di due equazioni (v. problema 17).

Si noti l'analogia esistente tra le equazioni (*7*) e (*8*). Risulta immediatamente evidente che la *massa* m corrisponde all'*induttanza* L, lo *spostamento* X alla *carica* Q, il *fattore di smorzamento* β alla *resistenza* R, la *costante della molla* k al *reciproco della capacità* $1/C$ e la forza $\mathcal{F}$ alla *forza elettromotrice* E. Tali analogie sono spesso utili nella pratica.

APPLICAZIONI ALLE TRAVI

Si supponga che una trave le cui estremità siano in $x = 0$ e $x = l$ coincida con l'asse delle x (fig. 3-4). Si supponga anche che sulla trave agisca un carico trasversale verticale dato da $W(x)$ per unità di lunghezza. L'asse della trave subisce in tali condizioni nel punto x uno spostamento trasversale $Y(x)$ che soddisfa alla equazione differenziale

Fig. 3-4

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \qquad (9)$$

Questo spostamento trasversale è detto anche *linea elastica* o *diagramma dell'abbassamento.* La grandezza EI è detta *rigidezza a flessione* della trave e nel seguito si supporrà che sia costante. (Di fatto E è il *modulo di elasticità di Young* della trave e I è il momento di inerzia della sezione trasversale della trave.) Le grandezze $EI\,Y''(x)$ e $EI\,Y'''(x)$ sono dette anche rispettivamente *momento flettente* e *taglio trasversale* in x. Si noti che l'asse della Y è assunto positivo verso il basso cosicché gli abbassamenti dell'asse della trave risultano positivi.

Le condizioni al contorno associate all'equazione (*9*) dipendono dal modo in cui la trave è vincolata. I casi più comuni sono:

1. **Estremità incastrata:** $Y = Y' = 0$.

2. **Estremità incernierata o semplicemente appoggiata:** $Y = Y'' = 0$.

3. **Estremità libera:** $Y'' = Y''' = 0$.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI A DERIVATE PARZIALI

La trasformazione di Laplace si presta anche alla risoluzione di varie equazioni differenziali a derivate parziali soggette a date condizioni al contorno. Questi problemi sono generalmente chiamati *problemi dei valori al contorno*. In questo capitolo verranno considerati alcuni semplici problemi di questo tipo (v. problemi 22-26 e 31). Una trattazione più completa dei problemi dei valori al contorno è data nel cap. 8 dove si sfruttano i vantaggi offerti dalla formula di inversione complessa data nel cap. 6.

PROBLEMI RISOLTI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI COSTANTI

1. Risolvere $Y'' + Y = t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = -2.$

Prendendo le trasformate di Laplace dei due membri dell'equazione differenziale e facendo uso delle condizioni date, si ha

$$\mathcal{L}\{Y''\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t\}, \qquad s^2y - s\,Y(0) - Y'(0) + y = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2y - s + 2 + y = \frac{1}{s^2}$$

Allora

$$y = \mathcal{L}\{Y\} = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{2}{s^2+1}$$

$$= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}$$

e

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - \frac{3}{s^2+1}\right\} = t + \cos t - 3\sin t$$

Verifica: $Y = t + \cos t - 3\sin t$, $Y' = 1 - \sin t - 3\cos t$, $Y'' = -\cos t + 3\sin t$. Allora $Y'' + Y = t$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$ e la funzione ottenuta è la soluzione richiesta.

Per un altro procedimento, che fa uso del teorema della convoluzione, v. problema 7 ponendo $a = 1$, $F(t) = t$.

2. Risolvere $Y'' - 3Y' + 2Y = 4e^{2t},\ Y(0) = -3,\ Y'(0) = 5.$

Si ha

$$\mathcal{L}\{Y''\} - 3\mathcal{L}\{Y'\} + 2\mathcal{L}\{Y\} = 4\mathcal{L}\{e^{2t}\}$$

$$\{s^2y - s\,Y(0) - Y'(0)\} - 3\{sy - Y(0)\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$\{s^2y + 3s - 5\} - 3\{sy + 3\} + 2y = \frac{4}{s-2}$$

$$(s^2 - 3s + 2)y + 3s - 14 = \frac{4}{s-2}$$

$$y = \frac{4}{(s^2-3s+2)(s-2)} + \frac{14-3s}{s^2-3s+2}$$

$$= \frac{-3s^2+20s-24}{(s-1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

Quindi $$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}\right\} = -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}$$

che è la soluzione richiesta, come si può verificare.

3. Risolvere $Y'' + 2Y' + 5Y = e^{-t}\sin t,\ Y(0) = 0,\ Y'(0) = 1.$

Si ha

$$\mathcal{L}\{Y''\} + 2\mathcal{L}\{Y'\} + 5\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}$$

$$\{s^2y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + 2\{sy - Y(0)\} + 5y = \frac{1}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$\{s^2y - s(0) - 1\} + 2\{sy - 0\} + 5y = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$(s^2+2s+5)y - 1 = \frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$y = \frac{1}{s^2+2s+5} + \frac{1}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

Allora (v. problema 28, pag. 60)

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}\right\} = \frac{1}{3}e^{-t}(\sin t + \sin 2t)$$

4. Risolvere $Y''' - 3Y'' + 3Y' - Y = t^2e^t,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = -2.$

Si ha

$$\mathcal{L}\{Y'''\} - 3\mathcal{L}\{Y''\} + 3\mathcal{L}\{Y'\} - \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{t^2e^t\}$$

$$\{s^3y - s^2Y(0) - s\,Y'(0) - Y''(0)\} - 3\{s^2y - s\,Y(0) - Y'(0)\} + 3\{sy - Y(0)\} - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Quindi

$$(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)y - s^2 + 3s - 1 = \frac{2}{(s-1)^3}$$

$$y = \frac{s^2-3s+1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{s^2-2s+1-s}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{(s-1)^2-(s-1)-1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

e

$$Y = e^t - te^t - \frac{t^2e^t}{2} + \frac{t^5e^t}{60}$$

5. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del problema 4.

In questo caso, le condizioni iniziali sono arbitrarie. Se si assume $Y(0) = A$, $Y'(0) = B$, $Y''(0) = C$, si trova come nel problema 4,

$$(s^3y - As^2 - Bs - C) - 3(s^2y - As - B) + 3(sy - A) - y = \frac{2}{(s-1)^3}$$

o

$$y = \frac{As^2 + (B-3A)s + 3A - 3B + C}{(s-1)^3} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

Dato che A, B e C sono arbitrarie, tale è anche il polinomio a numeratore del primo termine sulla destra. Si può quindi scrivere

$$y = \frac{c_1}{(s-1)^3} + \frac{c_2}{(s-1)^2} + \frac{c_3}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^6}$$

e prendendo l'antitrasformata arrivare alla soluzione generale

$$y = \frac{c_1 t^2}{2} e^t + c_2 t e^t + c_3 e^t + \frac{t^5 e^t}{60}$$

$$= c_4 t^2 + c_5 t e^t + c_6 e^t + \frac{t^5 e^t}{60}$$

dove c_k sono costanti arbitrarie.

Vale la pena di notare che determinare la soluzione generale è più facile che trovare una soluzione particolare perché si evita in quel caso di dover determinare le costanti che figurano nello sviluppo per frazioni parziali.

6. Risolvere $Y'' + 9Y = \cos 2t$ if $Y(0) = 1$, $Y(\pi/2) = -1$.

Dato che $Y'(0)$ non è noto, si ponga $Y'(0) = c$. Allora

$$\mathcal{L}\{Y''\} + 9\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{\cos 2t\}$$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) + 9y = \frac{s}{s^2+4}$$

$$(s^2+9)y - s - c = \frac{s}{s^2+4}$$

e

$$y = \frac{s+c}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}$$

$$= \frac{s}{s^2+9} + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)} - \frac{s}{5(s^2+9)}$$

$$= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{c}{s^2+9} + \frac{s}{5(s^2+4)}$$

Quindi

$$Y = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{c}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

Per determinare c, si noti che $Y(\pi/2) = -1$ per cui $-1 = -c/3 - 1/5$ o $c = 12/5$. Allora

$$Y = \frac{4}{5}\cos 3t + \frac{4}{5}\sin 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$$

7. Risolvere $Y'' + a^2 Y = F(t)$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -2$.

Si ha

$$\mathcal{L}\{Y''\} + a^2\mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$$

$$s^2 y - sY(0) - Y'(0) + a^2 y = f(s)$$

$$s^2 y - s + 2 + a^2 y = f(s)$$

e perciò

$$y = \frac{s-2}{s^2+a^2} + \frac{f(s)}{s^2+a^2}$$

Allora usando il teorema della convoluzione,

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-2}{s^2+a^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s^2+a^2}\right\}$$

$$= \cos at - \frac{2\sin at}{a} + F(t) * \frac{\sin at}{a}$$

$$= \cos at - \frac{2\sin at}{a} + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sin a(t-u)\,du$$

Si noti che in questo caso la trasformata di Laplace di $F(t)$ non figura nella soluzione finale.

8. Determinare la soluzione generale di $Y'' - a^2 Y = F(t)$.

Si ponga $Y(0) = c_1$, $Y'(0) = c_2$. Allora prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$s^2 y - sc_1 - c_2 - a^2 y = f(s)$$

o

$$y = \frac{sc_1 + c_2}{s^2 - a^2} + \frac{f(s)}{s^2 - a^2}$$

Quindi

$$Y = c_1 \cosh at + \frac{c_2}{a}\sinh at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$$

$$= A\cosh at + B\sinh at + \frac{1}{a}\int_0^t F(u)\sinh a(t-u)\,du$$

che è la soluzione generale richiesta.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI VARIABILI

9. Risolvere $tY'' + Y' + 4tY = 0$, $Y(0) = 3$, $Y'(0) = 0$.

Si ha

$$\mathcal{L}\{tY''\} + \mathcal{L}\{Y'\} + \mathcal{L}\{4tY\} = 0$$

o

$$-\frac{d}{ds}\{s^2 y - sY(0) - Y'(0)\} + \{sy - Y(0)\} - 4\frac{dy}{ds} = 0$$

cioè

$$(s^2+4)\frac{dy}{ds} + sy = 0$$

Allora

$$\frac{dy}{y} + \frac{s\,ds}{s^2+4} = 0$$

e integrando $\ln y + \frac{1}{2}\ln(s^2+4) = c_1$ o $y = \dfrac{c}{\sqrt{s^2+4}}$

Prendendo l'antitrasformata si ha $Y = cJ_0(2t)$.

Per determinare c si noti che $Y(0) = cJ_0(0) = c = 3$. Quindi

$$Y = 3J_0(2t)$$

10. Risolvere $tY'' + 2Y' + tY = 0,\ Y(0+) = 1,\ Y(\pi) = 0.$

Porre $Y'(0+) = c$. Quindi prendendo le trasformate di Laplace di ogni termine

$$-\frac{d}{ds}\{s^2y - sY(0+) - Y'(0+)\} + 2\{sy - Y(0+)\} - \frac{d}{ds}y = 0$$

o
$$-s^2y' - 2sy + 1 + 2sy - 2 - y' = 0$$

cioè
$$-(s^2+1)y' - 1 = 0 \quad \text{o} \quad y' = \frac{-1}{s^2+1}$$

Integrando
$$y = -\tan^{-1}s + A$$

Dato che $y \to 0$ quando $s \to \infty$, si deve avere $A = \pi/2$. Quindi

$$y = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}s = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

Allora in base all'esempio che segue il *teorema 1-13*, pag. 5,

$$Y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}$$

Questa soddisfa alla condizione $Y(\pi) = 0$ ed è la soluzione richiesta.

11. Risolvere $Y'' - tY' + Y = 1,\ Y(0) = 1,\ Y'(0) = 2.$

Si ha
$$\mathcal{L}\{Y''\} - \mathcal{L}\{tY'\} + \mathcal{L}\{Y\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

cioè
$$s^2y - sY(0) - Y'(0) + \frac{d}{ds}\{sy - Y(0)\} + y = \frac{1}{s}$$

o
$$s^2y - s - 2 + sy' + y + y = \frac{1}{s}$$

Allora
$$sy' + (s^2+2)y = s + 2 + \frac{1}{s}$$

o
$$\frac{dy}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right)y = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

Un fattore integrante è $e^{\int\left(s+\frac{2}{s}\right)ds} = e^{\frac{1}{2}s^2 + 2\ln s} = s^2e^{\frac{1}{2}s^2}$. Allora

$$\frac{d}{ds}\{s^2e^{\frac{1}{2}s^2}y\} = \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}s^2}$$

o, integrando,
$$y = \frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\int\left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right)s^2e^{\frac{1}{2}s^2}\,ds$$
$$= \frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}\int(s^2 + 2s + 1)\,e^{\frac{1}{2}s^2}\,ds$$
$$= \frac{1}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}[se^{\frac{1}{2}s^2} + 2e^{\frac{1}{2}s^2} + c]$$
$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2}e^{-\frac{1}{2}s^2}$$

Per determinare c, si noti che sviluppando in serie si ha

$$y = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2}(1 - \tfrac{1}{2}s^2 + \tfrac{1}{8}s^4 - \cdots)$$
$$= \frac{1}{s} + \frac{c+2}{s^2} - c(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}s^2 + \cdots)$$

Allora dato che $\mathcal{L}^{-1}\{s^k\} = 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots,$ prendendo l'antitrasformata si ha

$$Y = 1 + (c+2)t$$

Ma $Y'(0) = 2$, per cui $c = 0$ e la soluzione cercata è

$$Y = 1 + 2t$$

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

12. Risolvere $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 2X - 3Y \\ \dfrac{dY}{dt} = Y - 2X \end{cases}$ con le condizioni $X(0) = 8,\ Y(0) = 3.$

Prendendo le trasformate di Laplace, se $\mathcal{L}\{X\} = x,\ \mathcal{L}\{Y\} = y$, si ha

$$sx - 8 = 2x - 3y \quad \text{o} \quad (1)\quad (s-2)x + 3y = 8$$
$$sy - 3 = y - 2x \quad \text{o} \quad (2)\quad 2x + (s-1)y = 3$$

Risolvendo simultaneamente la (*1*) e (*2*),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{3s-22}{s^2-3s-4} = \frac{3s-22}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4}$$

Allora
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

13. Risolvere $\begin{cases} X'' + Y' + 3X = 15e^{-t} \\ Y'' - 4X' + 3Y = 15\sin 2t \end{cases}$ con le condizioni $X(0) = 35,\ X'(0) = -48,$ $Y(0) = 27,\ Y'(0) = -55.$

Prendendo le trasformate di Laplace, si ha

$$s^2x - s(35) - (-48) + sy - 27 + 3x = \frac{15}{s+1}$$

$$s^2y - s(27) - (-55) - 4\{sx - 35\} + 3y = \frac{30}{s^2+4}$$

o
$$(s^2+3)x + sy = 35s - 21 + \frac{15}{s+1} \qquad (1)$$
$$-4sx + (s^2+3)y = 27s - 195 + \frac{30}{s^2+4} \qquad (2)$$

Risolvendo simultaneamente la (*1*) e la (*2*),

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} & s \\ 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} & s^2+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{35s^3 - 48s^2 + 300s - 63}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{15(s^2+3)}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} - \frac{30s}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$
$$= \frac{30s}{s^2+1} - \frac{45}{s^2+9} + \frac{3}{s+1} + \frac{2s}{s^2+4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} s^2+3 & 35s - 21 + \dfrac{15}{s+1} \\ -4s & 27s - 195 + \dfrac{30}{s^2+4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2+3 & s \\ -4s & s^2+3 \end{vmatrix}}$$
$$= \frac{27s^3 - 55s^2 - 3s - 585}{(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{60s}{(s+1)(s^2+1)(s^2+9)} + \frac{30(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)}$$
$$= \frac{30s}{s^2+9} - \frac{60}{s^2+1} - \frac{3}{s+1} + \frac{2}{s^2+4}$$

Allora
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 30\cos t - 15\sin 3t + 3e^{-t} + 2\cos 2t$$
$$Y = \mathcal{L}^{-1}\{y\} = 30\cos 3t - 60\sin t - 3e^{-t} + \sin 2t$$

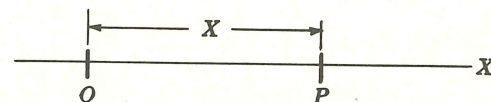
APPLICAZIONI ALLA MECCANICA

14. Una particella P di massa 2 g si muove lungo l'asse X ed è attirata verso l'origine O da una forza numericamente eguale a $8X$. Se all'istante $t = 0$ la particella è ferma nella posizione $X = 10$, determinare la sua posizione ad ogni istante successivo supponendo (*a*) che non agisca nessun'altra forza, (*b*) che agisca una forza di smorzamento di valore eguale a 8 volte la velocità istantanea della particella.

(*a*) Si assuma come verso positivo quello verso destra (v. fig. 3-5). Quando $X > 0$, la forza è diretta verso sinistra, cioè è negativa, ed è rappresentata da $-8X$. Quando $X < 0$ la forza è diretta verso destra (cioè è positiva) ed è rappresentata da $-8X$. Cosicché in entrambi i casi la forza è $-8X$. Allora per la legge di Newton,

Fig. 3-5

(Massa) · (Accelerazione) = Forza

$$2 \cdot \frac{d^2X}{dt^2} = -8X$$

o
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4X = 0 \qquad (1)$$

Le condizioni iniziali sono (*2*) $X(0) = 10$, (*3*) $X'(0) = 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace della (*1*) e usando le condizioni (*2*) e (*3*), si ha, se $x = \mathcal{L}\{X\}$,

$$s^2x - 10s + 4x = 0 \qquad \text{o} \qquad x = \frac{10s}{s^2+4}$$

Allora
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t$$

Il grafico rappresentativo del movimento è dato in fig. 3-6. L'*ampiezza* del moto (massimo spostamento dall'origine) è 10. Il *periodo* (tempo necessario per un ciclo completo) è π. La *frequenza* (numero di cicli al secondo) è $1/\pi$.

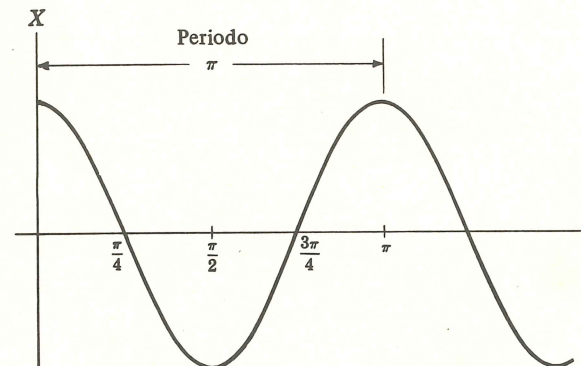



Fig. 3-6

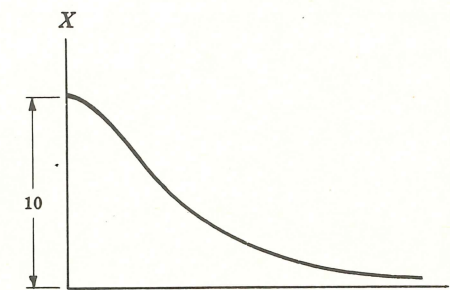



Fig. 3-7

(*b*) Quando $X > 0$ e $dX/dt > 0$, P è alla destra di O e si muove verso destra. Quindi la forza di smorzamento è rivolta verso sinistra (cioè è negativa) ed è data da $-8\,dX/dt$. Analogamente quando $X < 0$ e $dX/dt < 0$, P è alla sinistra e si muove verso sinistra, per cui la forza di smorzamento è volta verso destra (cioè è positiva) ed è ancora data da $-8dX/dt$. La forza di smorzamento è ancora $-8dX/dt$ anche nei casi $X > 0$, $dX/dt < 0$ e $X < 0$, $dX/dt > 0$. Allora

(Massa) · (Accelerazione) = Forza

o
$$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X - 8\frac{dX}{dt}$$

cioè
$$\frac{d^2X}{dt^2} + 4\frac{dX}{dt} + 4X = 0 \qquad (4)$$

con le condizioni iniziali (*5*) $X(0) = 10$, (*6*) $X'(0) = 0$.

Prendendo le trasformate di Laplace della (*4*) e usando le condizioni (*5*) e (*6*), si ha

$$s^2x - 10s + 4(sx - 10) + 4x = 0$$

o
$$x = \frac{10s + 40}{s^2 + 4s + 4}$$

Allora
$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10s+40}{(s+2)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10(s+2)+20}{(s+2)^2}\right\}$$
$$= 10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + 20\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$
$$= 10e^{-2t} + 20te^{-2t} = 10e^{-2t}(1+2t)$$

Il diagramma di X in funzione di t è dato in fig. 3-7. Si noti che il moto *non* è *oscillatorio*. La particella si avvicina ad O senza mai raggiungerlo.

15. Una particella di massa m si muove lungo l'asse delle X ed è attirata verso l'origine O da una forza numericamente eguale a kx, $k > 0$. Su di essa agisce anche una forza di smorzamento data da $\beta\, dX/dt$, $\beta > 0$. Discutere il moto, trattando tutti i casi ed assumendo che $X(0) = X_0$, $X'(0) = V_0$.

L'equazione del moto è

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = -kX - \beta \frac{dX}{dt}$$

o

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\alpha \frac{dX}{dt} + \omega^2 X = 0 \qquad (1)$$

dove $\alpha = \beta/2m$, $\omega^2 = k/m$.

La trasformata di Laplace di (*1*), usando le condizioni iniziali, dà

$$s^2x - X_0 s - V_0 + 2\alpha(sx - X_0) + \omega^2 x = 0$$

o

$$x = \frac{sX_0 + (V_0 + 2\alpha X_0)}{s^2 + 2\alpha s + \omega^2}$$

$$= \frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

Caso 1, $\omega^2 - \alpha^2 > 0$.

In questo caso,

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = X_0 e^{-\alpha t} \cos\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\, t + \frac{(V_0 + \alpha X_0)}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}\, t$$

Il moto è detto *oscillatorio smorzato* (v. fig. 3-8). La particella oscilla attorno all'origine O, mentre l'ampiezza dell'oscillazione diventa più piccola ad ogni ciclo. Il periodo dell'oscillazione è dato da $2\pi/\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$, e la frequenza è $\sqrt{\omega^2-\alpha^2}/2\pi$. La grandezza $\omega/2\pi$ (corrispondente a $\alpha = 0$, cioè in assenza di smorzamento) è detta *frequenza propria del sistema.*

Caso 2, $\omega^2 - \alpha^2 = 0$.

In questo caso,

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{X_0}{s+\alpha} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2}\right\}$$

$$= X_0 e^{-\alpha t} + (V_0 + \alpha X_0) t\, e^{-\alpha t}$$

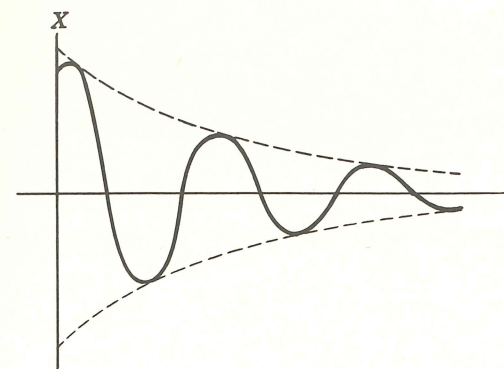
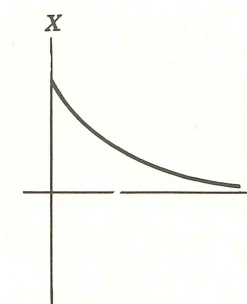
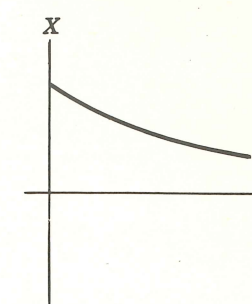
In questo caso la particella non oscilla indefinitamente attorno all'origine O, ma si avvicina lentamente ad essa senza mai raggiungerla. Il moto è detto moto *criticamente smorzato* dato che ogni diminuzione della costante di smorzamento β porterebbe al verificarsi di oscillazioni (v. fig. 3-9).

Caso 3, $\omega^2 - \alpha^2 < 0$.

In questo caso,

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+\alpha)X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2-\omega^2)} + \frac{V_0 + \alpha X_0}{(s+\alpha)^2 - (\alpha^2 - \omega^2)}\right\}$$

$$= X_0 \cosh\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\, t + \frac{V_0 + \alpha X_0}{\sqrt{\alpha^2-\omega^2}} \sinh\sqrt{\alpha^2-\omega^2}\, t$$

Il moto è detto *moto ultrasmorzato* e non è oscillatorio. Il diagramma è simile a quello del moto criticamente smorzato (v. fig. 3-10).

Moto oscillatorio smorzato
Fig. 3-8

Moto criticamente smorzato
Fig. 3-9

Moto ultrasmorzato
Fig. 3-10

APPLICAZIONI AI CIRCUITI ELETTRICI

16. Un induttore di 2 henry, un resistore di 16 ohm ed un capacitore di 0,02 farad sono collegati in serie con una f.e.m. di E volt. Per $t = 0$ la carica del capacitore e la corrente nel circuito sono nulle. Determinare la carica e la corrente per ogni istante $t > 0$ se (*a*) $E = 300$ volt, (*b*) $E = 100 \sin 3t$.

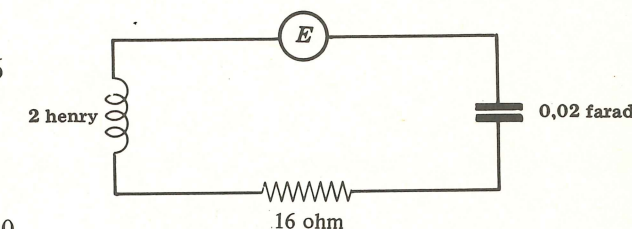



Fig. 3-11

Siano Q ed I rispettivamente la carica e la corrente istantanee in un generico istante t. Per le leggi di Kirchhoff si ha

$$2\frac{dI}{dt} + 16I + \frac{Q}{0{,}02} = E \qquad (1)$$

o dato che $I = dQ/dt$,

$$2\frac{d^2Q}{dt^2} + 16\frac{dQ}{dt} + 50Q = E \qquad (2)$$

con le condizioni iniziali $Q(0) = 0$, $I(0) = Q'(0) = 0$.

(*a*) Se $E = 300$, allora la (*2*) diventa

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 150$$

Prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$\{s^2q - s\,Q(0) - Q'(0)\} + 8\{sq - Q(0)\} + 25q = \frac{150}{s}$$

o

$$q = \frac{150}{s(s^2+8s+25)} = \frac{6}{s} - \frac{6s+48}{s^2+8s+25}$$

$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)+24}{(s+4)^2+9}$$

$$= \frac{6}{s} - \frac{6(s+4)}{(s+4)^2+9} - \frac{24}{(s+4)^2+9}$$

Allora

$$Q = 6 - 6e^{-4t}\cos 3t - 8e^{-4t}\sin 3t$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = 50e^{-4t}\sin 3t$$

(*b*) Se $E = 100 \sin 3t$, la (*2*) diventa

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50 \sin 3t$$

Prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$(s^2 + 8s + 25)q = \frac{150}{s^2+9}$$

e

$$q = \frac{150}{(s^2+9)(s^2+8s+25)}$$

$$= \frac{75}{26}\frac{1}{s^2+9} - \frac{75}{52}\frac{s}{s^2+9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s+4)^2+9} + \frac{75}{52}\frac{s+4}{(s+4)^2+9}$$

Quindi

$$Q = \frac{25}{26}\sin 3t - \frac{75}{52}\sin 3t + \frac{25}{26}e^{-4t}\sin 3t + \frac{75}{52}e^{-4t}\cos 3t$$

$$= \frac{25}{52}(2 \sin 3t - 3 \cos 3t) + \frac{25}{52}e^{-4t}(3 \cos 3t + 2 \sin 3t)$$

e

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{75}{52}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t) - \frac{25}{52}e^{-4t}(17 \sin 3t + 6 \cos 3t)$$

Per valori elevati di t, i termini di Q ed I che contengono il fattore e^{-4t} sono trascurabili e sono perciò detti *termini transitori* o *parte transitoria* della soluzione. Gli altri termini sono detti *termini di regime* o *parte di regime* della soluzione.

17. Data la rete elettrica di fig. 3-12, determinare la corrente dei vari rami assumendo che le correnti iniziali siano nulle.

Fig. 3-12

La seconda legge di Kirchhoff (v. pag. 80) afferma che la somma algebrica delle cadute di potenziale o tensione lungo un circuito chiuso è nulla. Si percorrano ora i circuiti chiusi *KLMNK* e *JKNPJ* in senso orario come indicato in figura. Percorrendo questi circuiti considereremo le cadute di tensione positive quando si va contro corrente. Un aumento di tensione è considerato come una caduta di tensione negativa.

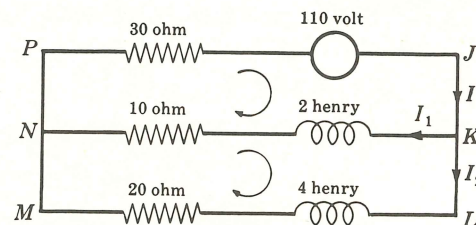
Sia I la corrente in *NPJK*. Questa corrente nel nodo K si divide in I_1 e I_2 in modo che $I = I_1 + I_2$. Ciò equivale alla prima legge di Kirchhoff (v. pag. 80).

Applicando la seconda legge di Kirchhoff ai circuiti *KLMNK* e *JKNPJ* si ha allora rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} -10I_1 - 2\frac{dI_1}{dt} + 4\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 &= 0 \\ 30I - 110 + 2\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

o

$$\left.\begin{aligned} -5I_1 - \frac{dI_1}{dt} + 2\frac{dI_2}{dt} + 10I_2 &= 0 \\ \frac{dI_1}{dt} + 20I_1 + 15I_2 &= 55 \end{aligned}\right\}$$

soggette alle condizioni $I_1(0) = I_2(0) = 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace del sistema e usando le condizioni iniziali si ha

$$-5i_1 - \{si_1 - I_1(0)\} + 2\{si_2 - I_2(0)\} + 10i_2 = 0$$
$$\{si_1 - I_1(0)\} + 20i_1 + 15i_2 = 55/s$$

o

$$(s+5)i_1 - (2s+10)i_2 = 0$$
$$(s+20)i_1 + 15i_2 = 55/s$$

Dalla prima equazione, $i_1 = 2i_2$, per cui la seconda equazione dà

$$(2s+55)i_2 = \frac{55}{s} \quad \text{o} \quad i_2 = \frac{55}{s(2s+55)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{2s+55}$$

Allora

$$I_2 = 1 - e^{-55t/2}$$
$$I_1 = 2I_2 = 2 - 2e^{-55t/2}$$
$$I = I_1 + I_2 = 3 - 3e^{-55t/2}$$

APPLICAZIONI ALLE TRAVI

18. Una trave incernierata alle due estremità $x = 0$ e $x = l$ (v. fig. 3-13) porta un carico uniformemente distribuito W_0. Determinare l'abbassamento di ogni punto della trave.

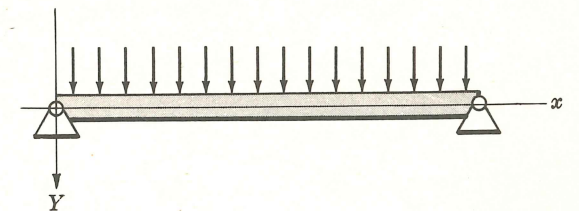



Fig. 3-13

L'equazione differenziale e le condizioni al contorno sono

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI} \qquad 0 < x < l \qquad (1)$$

$$Y(0) = 0,\ Y''(0) = 0,\ Y(l) = 0,\ Y''(l) = 0 \qquad (2)$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i termini della (*1*), si ha, se $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$,

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EIs} \qquad (3)$$

Usando le prime due condizioni (*2*) e le condizioni incognite $Y'(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$, si ha

$$y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}$$

E prendendo l'antitrasformata

$$Y(x) = c_1x + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} = c_1x + \frac{c_2x^3}{6} + \frac{W_0x^4}{24EI}$$

Dalle altre due condizioni (*2*), si ha

$$c_1 = \frac{W_0l^3}{24EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0l}{2EI}$$

Per cui l'abbassamento richiesto è

$$Y(x) = \frac{W_0}{24EI}(l^3x - 2lx^3 + x^4) = \frac{W_0}{24EI}x(l-x)(l^2 + lx - x^2)$$

19. Una *trave a sbalzo* è incastrata all'estremità $x = 0$ e libera all'estremità $x = l$ (fig. 3-14). Ad essa è applicato un carico distribuito la cui intensità per unità di lunghezza è

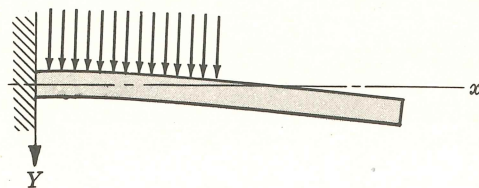
$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & l/2 < x < l \end{cases}$$

Determinare l'abbassamento.

Fig. 3-14

L'equazione differenziale e le condizioni al contorno sono

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{W(x)}{EI} \qquad 0 < x < l \tag{1}$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y''(l) = 0, \quad Y'''(l) = 0 \tag{2}$$

Per poter applicare la trasformazione di Laplace si estende la definizione di $W(x)$ nel modo seguente:

$$W(x) = \begin{cases} W_0 & 0 < x < l/2 \\ 0 & x > l/2 \end{cases} \tag{3}$$

Ciò può essere scritto in termini della funzione unitaria di Heaviside come

$$W(x) = W_0\{\mathcal{U}(x) - \mathcal{U}(x - l/2)\} \tag{4}$$

Prendendo le trasformate di Laplace della (*1*), se $y = y(s) = \mathcal{L}\{Y(x)\}$, si ha

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{W_0}{EI}\left\{\frac{1 - e^{-sl/2}}{s}\right\}$$

Dalle due prime condizioni (*2*) e dalle condizioni incognite $Y''(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$, si ha

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{W_0}{EIs^5}\{1 - e^{-sl/2}\}$$

Determinando l'antitrasformata si ha

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{W_0}{EI}\frac{x^4}{4!} - \frac{W_0}{EI}\frac{(x - l/2)^4}{4!}\mathcal{U}(x - l/2)$$

Il che equivale a:

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{c_1x^2}{2!} + \dfrac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 & x > l/2 \end{cases}$$

Facendo ora uso delle due condizioni $Y''(l) = 0$, $Y'''(l) = 0$ si ha

$$c_1 = \frac{W_0 l^2}{8EI}, \qquad c_2 = -\frac{W_0 l}{2EI}$$

Per cui l'abbassamento richiesto è

$$Y(x) = \frac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \frac{W_0l}{12EI}x^3 + \frac{W_0}{24EI}x^4 - \frac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4\mathcal{U}(x - l/2)$$

o

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 & 0 < x < l/2 \\ \dfrac{W_0l^2}{16EI}x^2 - \dfrac{W_0l}{12EI}x^3 + \dfrac{W_0}{24EI}x^4 - \dfrac{W_0}{24EI}(x - l/2)^4 & l/2 < x < l \end{cases}$$

20. Ad una trave è applicato un carico concentrato P_0 nel punto $x = a$. Dimostrare che questo carico può essere rappresentato dalla funzione $W(x) = P_0\,\delta(x - a)$ dove δ è la funzione delta di Dirac o funzione impulsiva.

Si consideri un carico uniformemente distribuito W_0 per unità di lunghezza, agente nel tratto tra a e $a + \epsilon$ (v. fig. 3-15). Allora il carico totale agente su quel tratto è

Fig. 3-15

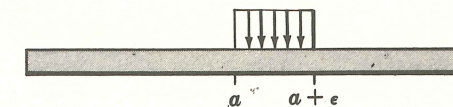
$$W_0[a + \epsilon - a] = W_0\epsilon$$

Dato che il carico totale è eguale a P_0, deve essere

$$W(x) = \begin{cases} P_0/\epsilon & a < x < a + \epsilon \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ma d'altra parte si è già convenuto di rappresentare ciò nel limite per $\epsilon \to 0$ come

$$W(x) = P_0\,\delta(x - a)$$

Perciò la dimostrazione è data.

21. Una trave è incastrata alle due estremità $x = 0$ e $x = l$ (v. fig. 3-16). Nel punto $x = l/3$ è applicato un carico concentrato P_0 verticale rivolto verso il basso. Determinare l'abbassamento dei punti della trave.

Per il problema 20, il carico concentrato in $x = l/3$ può essere rappresentato da $P_0\,\delta(x - l/3)$ dove δ è la funzione delta di Dirac o funzione impulsiva. Allora l'equazione differenziale dell'abbassamento e le condizioni al contorno sono

Fig. 3-16

$$\frac{d^4Y}{dx^4} = \frac{P_0}{EI}\delta(x - l/3) \tag{1}$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad Y(l) = 0, \quad Y'(l) = 0 \tag{2}$$

Prendendo le trasformate di Laplace, se $y = \mathcal{L}\{Y(x)\}$, si ha

$$s^4y - s^3Y(0) - s^2Y'(0) - sY''(0) - Y'''(0) = \frac{P_0}{EI}e^{-ls/3} \tag{3}$$

Usando le prime due condizioni (*2*) e posto $Y''(0) = c_1$, $Y'''(0) = c_2$, si ha

$$y = \frac{c_1}{s^3} + \frac{c_2}{s^4} + \frac{P_0}{EI}\frac{e^{-ls/3}}{s^4} \tag{4}$$

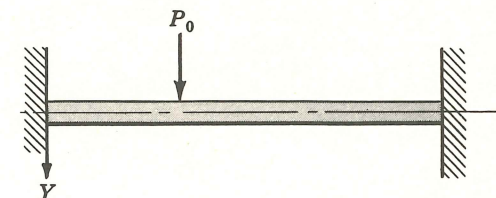
Prendendo l'antitrasformata si ha

$$Y(x) = \frac{c_1x^2}{2!} + \frac{c_2x^3}{3!} + \frac{P_0}{EI}\frac{(x - l/3)^3}{3!}\mathcal{U}(x - l/3) \tag{5}$$

oppure

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{6}c_2x^3 & 0 < x < l/3 \\ \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{6}c_2x^3 + \dfrac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

Dalle altre due condizioni (*2*) si ha

$$c_1 = \frac{4P_0l}{27EI}, \qquad c_2 = \frac{-20P_0}{27EI}$$

Allora l'abbassamento richiesto è

$$Y(x) = \frac{2P_0 lx^2}{27EI} - \frac{10P_0 x^3}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 \mathcal{U}(x - l/3)$$

o

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{2P_0 x^2(3l-5x)}{81EI} & 0 < x < l/3 \\ \dfrac{2P_0 x^2(3l-5x)}{81EI} + \dfrac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3 & l/3 < x < l \end{cases}$$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

22. Data la funzione $U(x, t)$ definita per $a \leqq x \leqq b,\ t > 0$, determinare

$$(a)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt, \qquad (b)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}\,dt$$

imponendo a $U = U(x,t)$ le restrizioni necessarie.

(*a*) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-st}\frac{\partial U}{\partial t}\,dt \\ &= \lim_{P\to\infty}\left\{e^{-st}U(x,t)\Big|_0^P + s\int_0^P e^{-st}U(x,t)\,dt\right\} \\ &= s\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)\,dt - U(x,0) \\ &= s\,u(x,s) - U(x,0) = s\,u - U(x,0)\end{aligned}$$

dove $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

Si è supposto che $U(x, t)$ soddisfi alle condizioni per la validità del *teorema 1-1*, pag. 2, se considerata come funzione unicamente di t.

(*b*) Usando la regola di Leibniz per la derivazione sotto segno di integrale si ha

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial U}{\partial x}\,dt = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}U\,dt = \frac{du}{dx}$$

23. Riferendosi al problema 22, dimostrare che

$$(a)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = s^2 u(x,s) - s\,U(x,0) - U_t(x,0)$$

$$(b)\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2u}{dx^2}$$

dove $U_t(x,0) = \left.\dfrac{\partial U}{\partial t}\right|_{t=0}$ e $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$.

Sia $V = \partial U/\partial t$. Allora, come nella parte (*a*) del problema 22, si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial V}{\partial t}\right\} &= s\mathcal{L}\{V\} - V(x,0) \\ &= s[s\mathcal{L}\{U\} - U(x,0)] - U_t(x,0) \\ &= s^2u - s\,U(x,0) - U_t(x,0)\end{aligned}$$

Si noti l'analogia tra questo risultato, quello della parte (*a*) del problema 22 e i *teoremi 1-6* e *1-9* di pag. 4. Generalizzazioni possono essere facilmente fatte.

24. Determinare la soluzione di

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2\frac{\partial U}{\partial t} + U, \qquad U(x,0) = 6e^{-3x}$$

che è limitata per $x > 0,\ t > 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace rispetto a t della equazione differenziale a derivate parziali data e sfruttando i risultati del problema 22, si ha

$$\frac{du}{dx} = 2\{su - U(x,0)\} + u$$

o

$$\frac{du}{dx} - (2s+1)u = -12e^{-3x} \tag{1}$$

per la condizione al contorno data. Si noti che la trasformazione di Laplace ha trasformato l'equazione differenziale a derivate parziali in un'equazione differenziale ordinaria (*1*).

Per risolvere la (*1*) si moltiplichino entrambi i suoi membri per il fattore integrante $e^{\int -(2s+1)\,dx} = e^{-(2s+1)x}$. Allora la (*1*) può essere scritta nella forma

$$\frac{d}{dx}\{u\,e^{-(2s+1)x}\} = -12\,e^{-(2s+4)x}$$

L'integrazione dà

$$u\,e^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c \qquad \text{o} \qquad u = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + c\,e^{(2s+1)x}$$

Ora dato che $U(x, t)$ deve essere limitata per $x\to\infty$, anche $u(x,s)$ deve essere limitata per $x\to\infty$ e da ciò segue che si deve prendere $c = 0$. Allora

$$u = \frac{6}{s+2}e^{-3x}$$

e quindi, prendendo l'antitrasformata, si ha

$$U(x,t) = 6\,e^{-2t-3x}$$

Si può facilmente verificare che questa è la soluzione cercata.

25. Risolvere $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(x,0) = 3\sin 2\pi x$, $U(0,t) = 0$, $U(1,t) = 0$ dove $0 < x < 1$, $t > 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale a derivate parziali e usando i problemi 22 e 23 si ha

$$su - U(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - su = -3\sin 2\pi x \tag{1}$$

dove $u = u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$. La soluzione generale della (*1*) è

$$u = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{3}{s+4\pi^2}\sin 2\pi x \tag{2}$$

Prendendo la trasformata di Laplace delle condizioni al contorno che coinvolgono t, si ha

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}\{U(1,t)\} = u(1,s) = 0 \tag{3}$$

Usando la prima condizione $[u(0,s) = 0]$ di (3) nella (2), si ha

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad (4)$$

Usando la seconda condizione $[u(1,s) = 0]$ di (3) nella (2), si ha

$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0 \qquad (5)$$

Dalle (4) e (5) si ricava $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ e la (2) allora diventa

$$u = \frac{3}{s + 4\pi^2} \sin 2\pi x \qquad (6)$$

da cui prendendo l'antitrasformata si ottiene

$$U(x,t) = 3\, e^{-4\pi^2 t} \sin 2\pi x \qquad (7)$$

Di questo problema esiste una interessante interpretazione fisica. Se si considera un solido limitato dalle due facce piane infinite $x = 0$ e $x = 1$, l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

è l'*equazione della trasmissione del calore* nel solido dove $U = U(x,t)$ è la *temperatura* che si ha sul piano x nell'istante t e k è una costante detta *diffusività*, che dipende dal materiale di cui è fatto il solido. Le condizioni al contorno $U(0,t) = 0$ e $U(1,t) = 0$ indicano che le temperature dei piani $x = 0$ e $x = 1$ sono mantenute eguali a zero, mentre $U(x,0) = 3 \sin 2\pi x$ rappresenta la temperatura iniziale di tutti i piani $0 < x < 1$. Il risultato (7) allora è la temperatura dei vari punti del solido per $t > 0$. Ulteriori applicazioni sono indicate nel cap. 8.

26. Determinare la soluzione limitata di $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$, $t > 0$ tale per cui $U(0,t) = 1$, $U(x,0) = 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace dell'equazione differenziale a derivate parziali e della condizione $U(0,t) = 1$, si ha rispettivamente

$$su - U(x,0) = \frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - su = 0 \qquad (1)$$

e

$$u(0,s) = \frac{1}{s} \qquad (2)$$

Dalla (1), $u = u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$. Dato che $U(x,t)$ deve essere limitata per $x \to \infty$, anche $u(x,s) = \mathcal{L}\{U(x,t)\}$ deve essere limitata per $x \to \infty$. Allora deve essere $c_1 = 0$, supponendo che sia $\sqrt{s} > 0$, in modo che sia

$$u(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x} \qquad (3)$$

Dalla (2) e dalla (3) si ha $c_2 = 1/s$, per cui

$$u(x,s) = \frac{e^{-\sqrt{s}x}}{s}$$

Allora sfruttando il problema 43, pag. 67, si ha

$$U(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{t})}^{\infty} e^{-v^2}\, dv$$

Fisicamente ciò rappresenta la temperatura di un punto generico di un solido semiillimitato $x > 0$ la cui faccia $x = 0$ sia mantenuta a temperatura unitaria e la cui temperatura iniziale sia zero (v. problema 25).

PROBLEMI VARI

27. Si supponga nel problema 14, pag. 88, che sulla particella agisca una forza $\mathcal{F}(t)$ ma che non ci siano forze di smorzamento. (*a*) Determinare la posizione della particella in funzione del tempo se $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos \omega t$. (*b*) Discutere il significato fisico del risultato ottenuto.

(*a*) Se si tiene conto della forza esterna $\mathcal{F}(t)$ l'equazione del moto è

$$2\frac{d^2X}{dt^2} = -8X + \mathcal{F}(t) \qquad (1)$$

o

$$2X'' + 8X = \mathcal{F}(t) \qquad (2)$$

Come prima le condizioni iniziali sono

$$X(0) = 10, \quad X'(0) = 0 \qquad (3)$$

Se $\mathcal{F}(t) = F_0 \cos \omega t$, la (2) diventa

$$2X'' + 8X = F_0 \cos \omega t \qquad (4)$$

Prendendo le trasformate e usando le condizioni (3), se $x = \mathcal{L}\{X\}$, si ha

$$2\{s^2 x - s(10) - 0\} + 8x = \frac{F_0 s}{s^2 + \omega^2}$$

Allora se $\omega^2 \neq 4$,

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)(s^2+\omega^2)} \qquad (5)$$

o

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}\left\{\frac{s}{s^2+4} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} \qquad (6)$$

e così

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{2(\omega^2-4)}(\cos 2t - \cos \omega t) \qquad (7)$$

Se $\omega^2 = 4$, allora la (5) diventa

$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{(F_0/2)s}{(s^2+4)^2} \qquad (8)$$

per cui, sfruttando il problema 13, pag. 53,

$$X = \mathcal{L}^{-1}\{x\} = 10\cos 2t + \frac{F_0}{8} t \sin 2t \qquad (9)$$

(*b*) Se $\omega^2 = 4$ o $\omega = 2$, cioè se la frequenza della forza esterna applicata è eguale alla frequenza naturale del sistema, dalla (9) si vede che le oscillazioni attorno al punto di equilibrio crescono indefinitamente. Questo fenomeno è detto *risonanza* e la corrispondente frequenza corrispondente a $\omega = 2$ è detta *frequenza di risonanza*. Se in tal caso la particella è vincolata ad una molla, questa finisce col rompersi.

28. Risolvere il problema 27 se (*a*) $\mathcal{F}(t) = F_0\, \mathcal{U}(t-a)$, (*b*) $\mathcal{F}(t) = F_0\, \delta(t)$.

(*a*) In questo caso l'equazione di moto è [equazione (2) del problema 27]

$$2X'' + 8X = F_0\, \mathcal{U}(t-a)$$

dove $X(0) = 10$, $X'(0) = 0$. Allora prendendo le trasformate di Laplace si ha

$$2(s^2 x - 10s) + 8x = \frac{F_0 e^{-as}}{s}$$

e
$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0 e^{-as}}{2s(s^2+4)}$$
$$= \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0 e^{-as}}{8}\left\{\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right\}$$

Per cui
$$X = \begin{cases} 10\cos 2t + \frac{1}{8}F_0\{1-\cos 2(t-a)\} & \text{se } t > a \\ 10 \cos 2t & \text{se } t < a \end{cases}$$

Quindi lo spostamento della particella fino all'istante $t = a$ è lo stesso riscontrato nel problema 27, dopo di che cambia.

(*b*) In questo caso l'equazione di moto è
$$2X'' + 8X = F_0\,\delta(t), \qquad X(0) = 10, \quad X'(0) = 0$$

Prendendo le trasformate di Laplace si ha
$$2(s^2x - 10s) + 8x = F_0$$

o
$$x = \frac{10s}{s^2+4} + \frac{F_0}{2(s^2+4)}$$

Per cui
$$X = 10\cos 2t + \tfrac{1}{4}F_0 \sin 2t \tag{1}$$

Fisicamente, applicare la forza esterna $F_0\,\delta(t)$ equivale ad applicare una forza molto grande per un tempo molto corto e non applicare più nessuna forza di lì in poi. L'effetto di ciò è uno spostamento di ampiezza molto più grande di quello riscontrato nel problema 14. Ciò risulta scrivendo la (*1*) nella forma
$$X = \sqrt{100 + F_0^2/16}\,\cos(2t - \phi) \tag{2}$$

dove
$$\cos\phi = \frac{10}{\sqrt{100+F_0^2/16}}, \qquad \sin\phi = \frac{F_0/4}{\sqrt{100+F_0^2/16}}$$

o $\tan\phi = F_0/40$, per cui l'ampiezza è $\sqrt{100+F_0^2/16}$.

29. Si supponga che $Y = Y_1(t)$ sia una soluzione dell'equazione
$$Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = 0$$

Determinare la soluzione generale di $Y''(t) + P(t)\,Y'(t) + Q(t)\,Y(t) = R(t)$.

L'equazione differenziale di cui si cerca la soluzione generale è data da
$$Y'' + PY' + QY = R \tag{1}$$

Dato che $Y = Y_1$ è una soluzione di questa equazione nel caso in cui il membro di destra sia nullo, si ha
$$Y_1'' + PY_1' + QY_1 = 0 \tag{2}$$

Moltiplicando l'equazione (*1*) per Y_1, l'equazione (*2*) per Y e sottraendo si ha
$$Y_1Y'' - YY_1'' + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{3}$$
che può essere scritta nella forma
$$\frac{d}{dt}(Y_1Y' - YY_1') + P(Y_1Y' - YY_1') = RY_1 \tag{4}$$

Un fattore integrante di questa equazione è
$$e^{\int P\,dt}$$

Moltiplicando la (*4*) per questo fattore, la si può scrivere nella forma
$$\frac{d}{dt}\left\{e^{\int P\,dt}(Y_1Y' - YY_1')\right\} = RY_1 e^{\int P\,dt} \tag{5}$$

Allora integrando
$$e^{\int P\,dt}(Y_1Y' - YY_1') = \int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1 \tag{6}$$

o
$$Y_1Y' - YY_1' = e^{-\int P\,dt}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1 e^{-\int P\,dt} \tag{7}$$

dove c_1 è una costante di integrazione.

Dividendo entrambi i membri della (*7*) per Y_1^2, essa può essere scritta nella forma
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Y}{Y_1}\right) = \frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt + c_1\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2} \tag{8}$$

Integrando entrambi i membri della (*8*) e moltiplicando per Y_1, si ha, se c_2 è una costante di integrazione,
$$Y = c_1Y_1\int\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\,dt + c_2Y_1 + Y_1\int\left\{\frac{e^{-\int P\,dt}}{Y_1^2}\int RY_1 e^{\int P\,dt}\,dt\right\}dt \tag{9}$$

Questa è la soluzione generale richiesta. Per un altro metodo di soluzione v. problema 103.

30. Determinare la soluzione generale di (*a*) $tY'' + 2Y' + tY = 0$, (*b*) $tY'' + 2Y' + tY = \csc t$.

(*a*) In base al problema 10, una soluzione particolare dell'equazione differenziale data è
$$Y_1(t) = \frac{\sin t}{t}$$

Dato che l'equazione differenziale data può essere scritta nella forma (*1*) del problema 29 con
$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = 0$$
dall'equazione (*9*) del problema 29 si vede che la soluzione generale è
$$Y = c_1\frac{\sin t}{t}\int\frac{e^{-\int(2/t)\,dt}}{\sin^2 t/t^2}\,dt + c_2\frac{\sin t}{t}$$
$$= c_1\frac{\sin t}{t}\int \csc^2 t\,dt + c_2\frac{\sin t}{t}$$
$$= c_1\frac{\sin t}{t}(-\cot t) + c_2\frac{\sin t}{t} = \frac{A\cos t + B\sin t}{t}$$

dove si sono scritte $c_1 = -A$, $c_2 = B$ come costanti arbitrarie.

(*b*) In questo caso si usa l'equazione (*9*) del problema 29 con
$$P = 2/t, \quad Q = 1, \quad R = (\csc t)/t$$

e si ha
$$Y = \frac{A\cos t + B\sin t}{t} - \cos t + \frac{\sin t \ln \sin t}{t}$$

31. Risolvere l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Y = 16x + 20\sin x$$

con le condizioni

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 16\pi, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad Y(x,0) = 16x + 12\sin 2x - 8\sin 3x$$

Prendendo le trasformate di Laplace si ha

$$s^2 y - s\,Y(x,0) - Y_t(x,0) - 4\frac{d^2y}{dx^2} + y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s} \tag{1}$$

o, sfruttando le condizioni date,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{4}(s^2+1)y = \frac{-4(s^2+1)x}{s} - \frac{5\sin x}{s} - 3s\sin 2x + 2s\sin 3x \tag{2}$$

$$y(0,s) = 0, \qquad y(\pi,s) = \frac{16\pi}{s} \tag{3}$$

Una soluzione particolare della (*2*) ha la forma

$$y_p = ax + b\sin x + c\sin 2x + d\sin 3x \tag{4}$$

Allora sostituendo ed eguagliando i coefficienti dei termini corrispondenti, si ha la soluzione particolare

$$y_p = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37} \tag{5}$$

La soluzione generale dell'equazione (*2*) con il membro di destra nullo (cioè la *soluzione complementare*) è

$$y_c = c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,x} \tag{6}$$

Per cui la soluzione generale della (*2*) è

$$y = y_p + y_c \tag{7}$$

Usando le condizioni (*3*) nella (*7*) si ha

$$c_1 + c_2 = 0, \qquad c_1 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} + c_2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{s^2+1}\,\pi} = 0$$

da cui $c_1 = c_2 = 0$. Perciò

$$y = \frac{16x}{s} + \frac{20\sin x}{s(s^2+5)} + \frac{12s\sin 2x}{s^2+17} - \frac{8s\sin 3x}{s^2+37}$$

Allora prendendo l'antitrasformata di Laplace, si ha la soluzione cercata

$$Y(x,t) = 16x + 4\sin x\,(1-\cos\sqrt{5}\,t) + 12\sin 2x\cos\sqrt{17}\,t - 8\sin 3x\cos\sqrt{37}\,t$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI COSTANTI

Trovare la soluzione delle equazioni seguenti usando le trasformate di Laplace e verificare le soluzioni.

32. $Y''(t) + 4Y(t) = 9t$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 7$. *Risp.* $Y(t) = 3t + 2\sin 2t$

33. $Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4t + 12e^{-t}$, $Y(0) = 6$, $Y'(0) = -1$.
Risp. $Y(t) = 3e^t - 2e^{2t} + 2t + 3 + 2e^{-t}$

34. $Y''(t) - 4Y'(t) + 5Y(t) = 125t^2$, $Y(0) = Y'(0) = 0$.
Risp. $Y(t) = 25t^2 + 40t + 22 + 2e^{2t}(2\sin t - 11\cos t)$

35. $Y''(t) + Y(t) = 8\cos t$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = -1$.
Risp. $Y(t) = \cos t - 4\sin t + 4t\cos t$

36. $Y'''(t) - Y(t) = e^t$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 0$.
Risp. $Y(t) = \frac{1}{3}te^t + \frac{1}{18}e^{-\frac{1}{2}t}\left\{9\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{5\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right\} - \frac{1}{2}e^t$

37. $Y^{iv}(t) + 2Y''(t) + Y(t) = \sin t$, $Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = Y'''(0) = 0$.
Risp. $Y(t) = \frac{1}{8}\{(3-t^2)\sin t - 3t\cos t\}$

38. Determinare la soluzione generale delle equazioni differenziali (*a*) del problema 2, pag. 82; (*b*) del problema 3, pag. 83; (*c*) del problema 6, pag. 84.
Risp. (*a*) $Y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + 4te^{2t}$
(*b*) $Y = e^{-t}(c_1\sin 2t + c_2\cos 2t) + \frac{1}{3}e^{-t}\sin t$
(*c*) $Y = c_1\sin 3t + c_2\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 2t$

39. Risolvere $Y''(t) + 9Y(t) = 18t$ con $Y(0) = 0$, $Y(\pi/2) = 0$. *Risp.* $Y(t) = 2t + \pi\sin 3t$

40. Risolvere $Y^{iv}(t) - 16Y(t) = 30\sin t$ con $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 2$, $Y''(\pi) = 0$, $Y'''(\pi) = -18$.
Risp. $Y = 2(\sin 2t - \sin t)$

41. Risolvere $Y'' - 4Y' + 3Y = F(t)$ con $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 0$.
Risp. $Y = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}\int_0^t (e^{3u} - e^u)\,F(t-u)\,du$

42. Risolvere l'equazione differenziale

$$Y'' + 4Y = F(t), \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 1$$

dove $F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$

Risp. $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\{\cos(2t-2) - \cos 2t\}$ per $t > 1$
e $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$ per $t < 1$

43. Risolvere il problema 42 per: (*a*) $F(t) = \mathcal{U}(t-2)$ (funzione a scalino unitario di Heaviside); (*b*) $F(t) = \delta(t)$ (funzione delta di Dirac); (*c*) $F(t) = \delta(t-2)$.
Risp. (*a*) $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$ per $t < 2$, $\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\{1 - \cos(2t-4)\}$ per $t > 2$
(*b*) $Y(t) = \sin 2t$, $t > 0$
(*c*) $Y(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$ per $t < 2$, $\frac{1}{2}\{\sin 2t + \sin(2t-4)\}^2$ per $t > 2$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE A COEFFICIENTI VARIABILI

Trovare la soluzione di ognuna delle seguenti equazioni usando le trasformate di Laplace e verificare le soluzioni.

44. $Y'' + tY' - Y = 0$, $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 1$. *Risp.* $Y = t$

45. $tY'' + (1-2t)Y' - 2Y = 0$, $Y(0) = 1$, $Y'(0) = 2$. *Risp.* $Y = e^{2t}$

46. $tY'' + (t-1)Y' - Y = 0$, $Y(0) = 5$, $Y(\infty) = 0$. *Risp.* $Y = 5e^{-t}$

47. Trovare la soluzione limitata dell'equazione

$$t^2Y'' + tY' + (t^2-1)Y = 0$$

tale per cui $Y(1) = 2$. *Risp.* $2J_1(t)/J_1(1)$

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

48. Risolvere $\begin{cases} Y' + Z' = t \\ Y'' - Z = e^{-t} \end{cases}$ con le condizioni $Y(0) = 3,\ Y'(0) = -2,\ Z(0) = 0.$

Risp. $Y = 2 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t, \quad Z = 1 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{3}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$

49. Risolvere $\begin{cases} Y' - Z' - 2Y + 2Z = \sin t \\ Y'' + 2Z' + Y = 0 \end{cases}$ con $Y(0) = Y'(0) = Z(0) = 0.$

Risp. $Y = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{4}{45}e^{2t} - \frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t + \frac{1}{3}te^{-t}, \quad Z = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{-t}$

50. Risolvere $\begin{cases} X' + 2Y'' = e^{-t} \\ X' + 2X - Y = 1 \end{cases}$ con $X(0) = Y(0) = Y'(0) = 0.$

Risp. $X = 1 + e^{-t} - e^{-at} - e^{-bt},\ Y = 1 + e^{-t} - be^{-at} - ae^{-bt}$ dove $a = \frac{1}{2}(2 - \sqrt{2}),\ b = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$

51. Risolvere il problema 49 con le condizioni $Y(0) = 0,\ Y'(\pi) = 1,\ Z(0) = 0.$

52. Risolvere $\begin{cases} tY + Z + tZ' = (t-1)e^{-t} \\ Y' - Z = e^{-t} \end{cases}$ posto $Y(0) = 1,\ Z(0) = -1.$

Risp. $Y = J_0(t),\ Z = -J_1(t) - e^{-t}$

53. Risolvere $\begin{cases} -3Y'' + 3Z'' = te^{-t} - 3\cos t \\ tY'' - Z' = \sin t \end{cases}$ posto $Y(0) = -1,\ Y'(0) = 2,\ Z(0) = 4,\ Z''(0) = 0.$

Risp. $Y = \frac{2}{3}t^2 + \frac{5}{3}t - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{-t}, \quad Z = \frac{2}{3}t^2 + \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t} + \cos t$

54. Trovare la soluzione generale del sistema di equazioni del problema 49.

Risp. $Y = c_1 + c_2\sin t + c_3\cos t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}e^{-t}$

$Z = 1 - c_2\sin t - c_3\cos t - \frac{1}{2}e^{-t}$

APPLICAZIONI ALLA MECCANICA

55. Riferendosi alla fig. 3-1, pag. 79, si supponga che sulla particella di massa m agisca una forza esterna $\mathcal{F}(t)$, $t > 0$ senza nessuna forza di smorzamento.

(*a*) Dimostrare che se la particella parte dalla condizione di riposo a distanza $X = a$ dalla posizione di equilibrio $X = 0$, lo spostamento X in funzione del tempo t per ogni $t > 0$ può essere determinato dalla equazione del moto

$$mX'' + kX = \mathcal{F}(t), \quad X(0) = a, \quad X'(0) = 0$$

dove gli indici indicano derivate rispetto a t.

(*b*) Determinare X in funzione di t per $\mathcal{F}(t) = F_0$ se $t > 0$.

(*c*) Determinare X in funzione del tempo t se $\mathcal{F}(t) = F_0 e^{-\alpha t}$ dove $\alpha > 0$.

Risp. (*b*) $X = a + \frac{F_0}{k}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$

(*c*) $X = a + \frac{F_0}{m\alpha^2 + k}(e^{-\alpha t} - \cos\sqrt{k/m}\,t) + \frac{\alpha F_0\sqrt{m/k}}{m\alpha^2 + k}\sin\sqrt{k/m}\,t$

56. Risolvere il problema 55 se $\mathcal{F}(t) = F_0\sin\omega t$, considerando i due casi: (*a*) $\omega \neq \sqrt{k/m}$, (*b*) $\omega = \sqrt{k/m}$. Discutere il significato fisico di ognuno dei due casi.

57. Una particella si sposta lungo una retta in modo tale che la sua distanza X da un punto fissato O in funzione del tempo t è data da

$$X''(t) + 4X(t) + 5X(t) = 80\sin 5t$$

(*a*) Se nell'istante $t = 0$ una particella si trova in quiete nella posizione $X = 0$, determinare la distanza per ogni $t > 0$.

(*b*) Determinare l'ampiezza, il periodo e la frequenza del moto dopo un tempo infinito.

(*c*) Quale dei termini del risultato di (*a*) è il termine transitorio e quale è il termine di regime?

(*d*) Il moto determinato è ultrasmorzato, criticamente smorzato o oscillatorio smorzato?

Risp. (*a*) $X(t) = 2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t) - 2(\sin 5t + \cos 5t)$

(*b*) Ampiezza $= 2\sqrt{2}$, periodo $= 2\pi/5$. frequenza $= 5/2\pi$

(*c*) Termine transitorio, $2e^{-2t}(\cos t + 7\sin t)$; termine di regime, $-2(\sin 5t + \cos 5t)$

(*d*) Oscillatorio smorzato.

58. Si supponga che per $t = 0$, la massa m di fig. 3-1, pag. 79, sia in quiete nella posizione di equilibrio $X = 0$. Si supponga inoltre che venga improvvisamente applicata a tale massa una forza capace di imprimerle la velocità istantanea V_0 verso destra e che quindi la forza sia tolta. Dimostrare che lo spostamento della massa dalla posizione di equilibrio in funzione del tempo t per ogni $t > 0$ è

(*a*) $$V_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t.$$

se non vi è forza di smorzamento e

(*b*) $$\frac{V_0}{\alpha}e^{-\beta t/2m} \quad \text{dove} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

se vi è una forza di smorzamento di valore $\beta X'(t)$ dove $\beta < 2\sqrt{km}$.

59. Risolvere il problema 55 se: (*a*) $\mathcal{F}(t) = F_0\mathcal{U}(t - T)$ (funzione a scalino unitario di Heaviside); (*b*) $\mathcal{F}(t) = F_0\delta(t - T)$ (funzione delta di Dirac). Discutere il significato fisico di ogni caso.

Risp. (*a*) $X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t$ per $t < T$ e

$X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/k)\{1 - \cos\sqrt{k/m}\,(t - T)\}$ per $t > T$

(*b*) $X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t$ per $t < T$ e

$X = aF_0\cos\sqrt{k/m}\,t + (F_0/\sqrt{km})\sin\sqrt{k/m}\,(t - T)$ per $t > T$

60. Si supponga che per $t = 0$ la massa m di fig. 3-1, pag. 79, sia in quiete nella posizione di equilibrio e che le venga applicata una forza $F_0\delta(t)$. Determinare lo spostamento in funzione del tempo t per $t > 0$ se (*a*) il sistema non è smorzato, (*b*) il sistema è criticamente smorzato. Discutere il significato fisico di ognuno dei casi.

Risp. (*a*) $\frac{F_0}{\sqrt{km}}\sin\sqrt{k/m}\,t$, (*b*) $\frac{F_0}{m}t\,e^{-\beta t/2m}$

61. Una pallina di massa m è lanciata dalla superficie terrestre verso l'alto con velocità V_0. Dimostrare che salirà fino ad un'altezza massima eguale a $V_0^2/2g$, dove g è l'accelerazione dovuta alla gravità.

62. Una massa m si muove lungo l'asse x sotto l'effetto di una forza che è proporzionale alla velocità istantanea e di verso opposto a quello del moto. Supponendo che per $t = 0$ la particella si trovi in $X = a$ e si stia movendo verso destra con velocità V_0, determinare la sua posizione quando si arresta.

63. Una particella si sposta nel piano xy in modo tale che la sua posizione (X, Y) in funzione del tempo è data da

$$X'' + k_1^2 Y = 0, \qquad Y'' + k_2^2 X = 0$$

Supponendo che nell'istante $t = 0$ la particella si trovi in quiete in (a, b), determinare la sua posizione in funzione del tempo per $t > 0$.

Risp. $X = \left(\frac{ak_2 + bk_1}{2k_2}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t + \left(\frac{ak_2 - bk_1}{2k_2}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$

$Y = \left(\frac{ak_2 + bk_1}{2k_1}\right)\cos\sqrt{k_1k_2}\,t - \left(\frac{ak_2 - bk_1}{2k_1}\right)\cosh\sqrt{k_1k_2}\,t$

APPLICAZIONI AI CIRCUITI ELETTRICI

64. Un resistore di R ohm ed un capacitore di C farad sono collegati in serie con un generatore che dà una f.e.m. di E volt (v. fig. 3-17). All'istante $t = 0$ la carica del capacitore è nulla. Determinare la carica e la corrente in funzione del tempo per $t > 0$ nel caso (a) $E = E_0$, una costante; (b) $E = E_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Risp. (a) $Q = CE_0(1 - e^{-t/RC})$, $I = (E_0/R)e^{-t/RC}$

(b) $Q = \dfrac{CE_0}{1 - \alpha RC}(e^{-\alpha t} - e^{-t/RC})$,

$I = \dfrac{CE_0}{1 - \alpha RC}\left(\dfrac{e^{-t/RC}}{RC} - \alpha e^{-\alpha t}\right)$ se $\alpha \neq 1/RC$

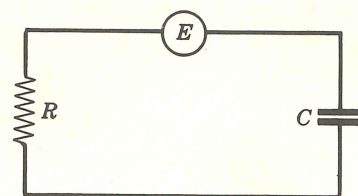



Fig. 3-17

65. Risolvere il problema 64 per $E = E_0 \sin \omega t$ e la carica iniziale del capacitore eguale a Q_0.

Risp. $Q = \left\{Q_0 + \dfrac{\omega E_0}{R(\omega^2 + 1/R^2C^2)}\right\} e^{-t/RC} - \dfrac{E_0}{R}\left\{\dfrac{\omega \cos \omega t - (1/RC)\sin \omega t}{\omega^2 + 1/R^2C^2}\right\}$, $I = dQ/dt$

66. Un induttore di L henry e un capacitore di C farad sono collegati in serie con un generatore di E volt. Allo istante $t = 0$ la carica del capacitore e la corrente sono nulle. Determinare la carica del capacitore in funzione del tempo per $t > 0$ nel caso: (a) $E = E_0$, una costante: (b) $E = E_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$.

Risp. (a) $Q = CE_0\{1 - \cos(t/\sqrt{LC})\}$

(b) $Q = \dfrac{E_0}{L(\alpha^2 + 1/LC)}\{e^{-\alpha t} - \cos(t/\sqrt{LC})\} + \dfrac{\alpha E_0\sqrt{C/L}}{\alpha^2 + 1/LC}\sin(t/\sqrt{LC})$

67. Risolvere il problema 66 per $E = E_0 \sin \omega t$, discutendo i casi (a) $\omega \neq 1/\sqrt{LC}$ e (b) $\omega = 1/\sqrt{LC}$ e spiegando il significato fisico.

68. Risolvere il problema 66 se $E(t)$ è (a) $E_0\,\mathcal{U}(t - a)$ dove $\mathcal{U}(t - a)$ è una funzione a scalino unitario di Heaviside, (b) $E_0\,\delta(t)$ dove $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac.

Risp. (a) $Q = 0$ per $t < a$, e $CE_0\left\{1 - \cos\left(\dfrac{t-a}{LC}\right)\right\}$ per $t > a$

(b) $Q = E_0\sqrt{C/L}\sin(t/\sqrt{LC})$

69. Un induttore di 3 henry è collegato in serie con un resistore di 30 ohm e una f.e.m. di 150 volt. Supponendo che per $t = 0$ la corrente sia nulla, determinare la corrente in funzione del tempo per $t > 0$.
Risp. $I = 5(1 - e^{-10t})$

70. Risolvere il problema 69 se la f.e.m. è data da $150 \sin 20t$. *Risp.* $I = \sin 20t - 2\cos 20t + 2e^{-10t}$

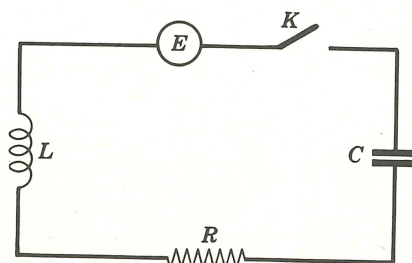
71. Determinare la carica del capacitore e la corrente nel circuito di fig. 3-18 in funzione del tempo, dopo che l'interruttore K è stato chiuso nell'istante $t = 0$. Assumere che L, R, C ed E siano delle costanti e che all'istante $t = 0$ la carica e la corrente siano nulle. Discutere i vari casi che si presentano.

72. (a) Risolvere il problema 71 con $E = E_0 \sin \omega t$.
(b) Dimostrare che si ha risonanza se si assume $\omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{2L^2}}$. (c) Discutere il caso con $R = 0$.

Fig. 3-18

73. Un circuito elettrico è formato da un induttore di L henry in serie con un capacitore di C farad. Nell'istante $t = 0$ viene applicata al circuito una f.e.m.

$$E(t) = \begin{cases} E_0 t/T_0 & 0 < t < T_0 \\ 0 & t > T_0 \end{cases}$$

Determinare la carica del capacitore in funzione del tempo per ogni $t > 0$, nell'ipotesi che per $t = 0$ siano nulle sia la carica che la corrente.

Risp. $Q = \dfrac{CE_0}{T_0}\{t - \sqrt{LC}\sin(t/\sqrt{LC})\}$ se $0 < t < T_0$ e

$Q = \dfrac{CE_0}{T_0}\left\{T_0 \cos\left(\dfrac{t - T_0}{\sqrt{LC}}\right) + \sqrt{LC}\sin\left(\dfrac{t - T_0}{\sqrt{LC}}\right) - \sqrt{LC}\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right\}$ se $t > T_0$

74. Nel circuito elettrico di fig. 3-19 si ha

$E = 500 \sin 10t$
$R_1 = 10$ ohm
$R_2 = 10$ ohm
$L = 1$ henry
$C = 0{,}01$ farad

Supposto che per $t = 0$ siano nulle sia la carica del capacitore che le correnti I_1 e I_2, determinare la carica del capacitore in funzione del tempo per ogni $t > 0$.

Risp. $Q = \sin 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}(\sin 10t + 2\cos 10t)$

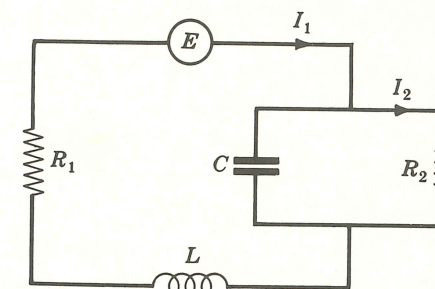



Fig. 3-19

APPLICAZIONI ALLE TRAVI

75. Una trave incastrata alle due estremità $x = 0$ e $x = l$ è sottoposta ad un carico uniforme W_0 per unità di lunghezza. Dimostrare che l'abbassamento dei suoi punti è dato da $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2(l - x)^2}{24EI}$

76. Risolvere il problema 75 nel caso in cui l'estremità $x = 0$ sia incastrata e l'estremità $x = l$ incernierata.

77. Una trave a sbalzo, incastrata in $x = 0$ e libera in $x = l$, è sottoposta ad un carico uniforme W_0 per unità di lunghezza. Dimostrare che il suo abbassamento è dato da $Y(x) = \dfrac{W_0 x^2}{24EI}(x^2 - 4lx + 6l^2)$.

78. Una trave, le cui estremità $x = 0$ e $x = l$ sono incernierate, è sottoposta ad un carico

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/3 \\ W_0 & l/3 < x < l \end{cases}$$

Determinare l'abbassamento.

79. Una trave a sbalzo, incastrata in $x = 0$ e libera in $x = l$, è sottoposta ad un carico concentrato P_0 applicato nel punto $x = l$. Dimostrare che l'abbassamento è $Y(x) = \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3l - x)$.

80. Risolvere il problema 79 con il carico applicato in $x = l/2$.

81. Una trave è incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = l$. Dimostrare che se è sottoposta ad un carico concentrato P_0 rivolto verso il basso e applicato in $x = l/2$ l'abbassamento è

$$Y(x) = \frac{P_0 x}{48EI}(3l^2 - 4x^2) \qquad 0 < x < l/2$$

L'abbassamento nel tratto $l/2 < x < l$ si ottiene per simmetria sostituendo $l - x$ a x.

82. Risolvere il problema 81 nel caso che le estremità della trave siano incastrate.

83. Una trave ha le estremità incernierate in $x = 0$ e $x = l$. Nel punto $x = l/3$ è applicato un carico P_0 agente verticalmente verso il basso. Dimostrare che l'abbassamento è dato da

$$Y(x) = \frac{P_0 x(5l^2 - 9x^2)}{81EI} + \frac{P_0}{6EI}(x - l/3)^3\,\mathcal{U}(x - l/3)$$

84. Una trave è incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = l$. La trave è sottoposta ad un carico uniforme W_0 per unità di lunghezza e a un carico concentrato P_0 applicato in $x = l/2$. (*a*) Determinare l'abbassamento. (*b*) Discutere come si può derivare la soluzione di (*a*) dalle soluzioni dei problemi 80 e 81. Spiegare.

85. Una trave, le cui estremità sono incastrate in $x = 0$ e $x = l$, è sottoposta ad un carico $W(x)$ per unità di lunghezza dato da

$$W(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < l/2 \\ W_0 x & l/2 < x < l \end{cases}$$

ed anche ad un carico concentrato applicato in $x = l/3$. Determinare l'abbassamento.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

86. Risolvere $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 0$, $U(5,t) = 0$, $U(x,0) = 10 \sin 4\pi x$.

Risp. $U(x,t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x$

87. Risolvere il problema 80 con $U(x,0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x$.

Risp. $U(x,t) = 10\, e^{-32\pi^2 t} \sin 4\pi x - 5\, e^{-72\pi^2 t} \sin 6\pi x$

88. Risolvere $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y(0,t) = 0$, $Y(2,t) = 0$, $Y(x,0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$.

Risp. $Y(x,t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$

89. Dare le interpretazioni fisiche (*a*) del problema 86, (*b*) del problema 87, (*c*) del problema 88.

90. Risolvere $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0,t) = 0$, $U(\pi/2, t) = 0$ con

(*a*) $U(x,0) = 30 \cos 5x$, (*b*) $U(x,0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

Risp. (*a*) $30\, e^{-75t} \cos 5x$, (*b*) $U(x,t) = 20\, e^{-27t} \cos 3x - 5\, e^{-243t} \cos 9x$

91. Dare un'interpretazione fisica del problema 90.

92. (*a*) Determinare la soluzione di $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4U$, $U(0,t) = 0$, $U(\pi,t) = 0$, $U(x,0) = 6 \sin x - 4 \sin 2x$.

(*b*) Dare un'interpretazione fisica della soluzione.

Risp. (*a*) $U(x,t) = 6\, e^{-5t} \sin x - 4\, e^{-8t} \sin 2x$

93. Risolvere $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 16\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$, $Y_x(0,t) = 0$, $Y(3,t) = 0$, $Y(x,0) = 0$, $Y_t(x,0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x$.

Risp. $Y(x,t) = 12 \cos \pi x \sin 4\pi t + 16 \cos 3\pi x \sin 12\pi t - 8 \cos 5\pi x \sin 20\pi t$

94. Determinare la soluzione limitata $Y(x,t)$, $0 < x < 1$, $t > 0$ del problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 1 - e^{-t}, \qquad Y(x,0) = x$$

Risp. $Y(x,t) = x + 1 - e^{-t}$

95. Risolvere l'equazione

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

con le condizioni

$$Y(0,t) = 10 \sin 2t, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} Y(x,t) = 0$$

PROBLEMI VARI

96. Dimostrare che la soluzione dell'equazione differenziale

$$Y''(t) - k^2 Y(t) = F(t)$$

con le condizioni $Y(0) = a$, $Y'(0) = b$ è

$$Y(t) = a \cosh kt + (b/k) \sinh kt + \frac{1}{k}\int_0^t F(u) \sinh k(t-u)\, du$$

97. Risolvere $Y^{\text{iv}}(t) + Y'''(t) = 2 \sin t$, $Y(0) = Y'(0) = 0$, $Y''(0) = 1$, $Y'''(0) = -2$.

Risp. $Y = \frac{1}{2}t^2 - 2 + e^{-t} + \sin t + \cos t$

98. Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale del problema 45.

Risp. $Y(t) = c_1 e^{2t} \displaystyle\int \frac{e^{-2t}}{t}\, dt + c_2 e^{2t}$

99. Determinare la soluzione dell'equazione

$$tY'' - (t+2)Y' + 3Y = t - 1$$

che ammette la trasformata di Laplace ed è tale per cui $Y(0) = 0$.

100. Qual è la soluzione generale dell'equazione differenziale del problema 99?

101. (*a*) Usare le trasformate di Laplace per dimostrare che la soluzione di

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + k^2 Y = A \cos \omega t, \qquad Y(0) = \alpha,\ Y'(0) = \beta$$

è $$Y(t) = \frac{A(\cos \omega t - \cos kt)}{\omega^2 - k^2} + \alpha \cos kt + (\beta/k) \sin kt.$$

(*b*) Dare una interpretazione fisica dei risultati ottenuti in (*a*).

102. Risolvere rispetto a $\begin{cases} X' + Y' = Y + Z \\ Y' + Z' = X + Z \\ X' + Z' = X + Y \end{cases}$ con $X(0) = 2$, $Y(0) = -3$, $Z(0) = 1$.

Risp. $X = \frac{2}{3}e^{-t/2}\{3 \cos(\sqrt{3}\, t/2) - 2\sqrt{3} \sin(\sqrt{3}\, t/2)\}$

103. Risolvere il problema 29 ponendo $Y = VY_1$, dove V è una nuova variabile dipendente.

104. Si può usare il metodo delle trasformate di Laplace per trovare la soluzione generale di

$$Y'' + Y = \sec t$$

Spiegare.

105. (*a*) Determinare una soluzione limitata di

$$(t-1)Y'' + (5-4t)Y' - 4Y = 0$$

tale per cui $Y(0) = 3$. (*b*) Qual è la soluzione generale dell'equazione data in (*a*)?

Risp. (*a*) $Y = 3e^{4t}$, (*b*) $Y = c_1 e^{4t} \displaystyle\int \frac{e^{-4t}}{t-1}\, dt + c_2 e^{4t}$

106. (*a*) Dimostrare che $$I(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}\,dx$$

soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{dI}{dt} - I = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}, \qquad I(0) = \pi/2$$

(*b*) Risolvendo l'equazione differenziale data in (*a*), dimostrare che

$$I(t) = \frac{\pi}{2} e^t \operatorname{erfc}\sqrt{t}$$

107. Una particella si sposta lungo una retta (asse x) ed è sottoposta all'azione di una forza contrastante proporzionale alla distanza a cui si trova da un punto fisso O della retta. Supposto che la particella sia posta ad una distanza a da O e che gli sia conferita una velocità V_0 in direzione di O, determinare la distanza minima da O che essa raggiunge.

108. Se la pallina del problema 61 incontra una resistenza da parte dell'aria proporzionale alla sua velocità istantanea, dimostrare che l'altezza massima raggiunta è

$$\frac{m}{k^2}(kV_0 + mg - kg) - \frac{m^2 g}{k^2}$$

dove k è una costante di proporzionalità.

109. Nel circuito di fig. 3-18, pag. 106, si supponga che la f.e.m. sia una funzione di t mentre L, R e C siano delle costanti. Si supponga anche che nell'istante $t = 0$ in cui si chiude l'interruttore siano nulle sia la carica Q del capacitore che la corrente I nel circuito. Dimostrare che se $R^2 < 4L/C$, la corrente per $t > 0$ è data da

$$I(t) = \frac{1}{L}\int_0^t E(t-u)\,e^{-Ru/2L}\left(\cos\alpha u - \frac{R}{2L\alpha}\sin\alpha u\right)du$$

dove $\alpha = \sqrt{1/LC - R^2/4L^2}$.

110. Risolvere il problema 109 nel caso sia (*a*) $R^2 = 4L/C$, (*b*) $R^2 > 4L/C$.

111. Elaborare problemi di meccanica analoghi a quelli (*a*) del problema 64, (*b*) del problema 66, (*c*) del problema 71.

112. Elaborare problemi di elettrotecnica analoghi a quelli (*a*) del problema 55, (*b*) del problema 57.

113. Elaborare un problema analogo al 74 nel campo meccanico riguardante masse collegate con molle.

114. Una particella di massa m si sposta lungo l'asse x sotto l'influsso di una forza $\mathcal{F}(t)$ come indicato in fig. 3-20. Supposto che per $t = 0$ la particella sia in quiete in $x = 0$, determinare la sua posizione per ogni $t > 0$.

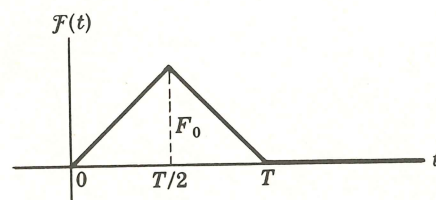



Fig. 3-20

115. Una trave incastrata alle estremità $x = 0$ e $x = l$ è sottoposta ad un carico concentrato P_0 applicato nel punto $x = a$ con $0 < a < l$. Dimostrare che l'abbassamento è

$$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} & 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{P_0 x^2 (l-a)^2}{6EIl^3}\{3al - (2a+l)x\} + \dfrac{P_0 (x-a)^3}{6EI} & a < x < l \end{cases}$$

116. Risolvere il problema 115 nel caso la trave sia incastrata in $x = 0$ e libera in $x = l$.

Risp. $$Y(x) = \begin{cases} \dfrac{P_0 x^2}{6EI}(3a - x) & 0 < x < a \\[2ex] \dfrac{P_0 a^2}{6EI}(3x - a) & a < x < l \end{cases}$$

117. Una trave incernierata in $x = 0$ e $x = l$ è sottoposta a carichi concentrati P_0 applicati in $x = l/3$ e $x = 2l/3$. Determinare l'abbassamento.

118. Se una trave sottoposta ad un carico $W(x)$ per unità di lunghezza poggia su una fondazione elastica, l'equazione differenziale del suo abbassamento è

$$EI\frac{d^4Y}{dx^4} + kY = W(x)$$

dove k è detta *costante elastica della fondazione.* Si supponga che una trave del genere, incastrata alle due estremità $x = 0$ e $x = l$, sia sottoposta ad un carico W_0 per unità di lunghezza. Dimostrare che il momento flettente in $x = 0$ è dato da

$$\frac{W_0}{2\alpha}\left(\frac{\sinh al - \sin al}{\sinh al + \sin al}\right)$$

dove $a = \sqrt[4]{k/4EI}$.

119. Due circuiti elettrici, detti *circuito primario* e *circuito secondario*, sono accoppiati induttivamente come indicato in fig. 3-21.

(*a*) Dimostrare che se M è l'induttanza reciproca, le correnti I_1 e I_2 sono

$$L_1\frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 + M\frac{dI_2}{dt} = E$$

$$L_2\frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + M\frac{dI_1}{dt} = 0$$

(*b*) Dimostrare che se nell'istante $t = 0$ le correnti I_1 e I_2 sono nulle, per ogni $t > 0$ esse sono

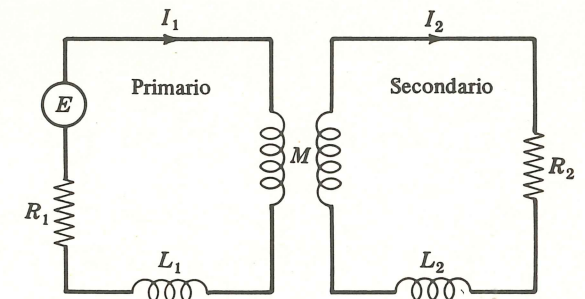
Fig. 3-21

$$I_1 = \frac{EL_2}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_1 - \alpha_2}\right) + \frac{ER_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t}}{\alpha_1} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2}\right) + \frac{E}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{EM}{L_1L_2 - M^2}\left(\frac{e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$$

dove α_1 e α_2 sono le radici dell'equazione

$$(L_1L_2 - M^2)\alpha^2 + (L_1R_2 + L_2R_1)\alpha + R_1R_2 = 0$$

120. Discutere il problema 119 nel caso in cui è $L_1L_2 = M^2$.

CAPITOLO 4

Applicazioni alle equazioni integrali e differenza

EQUAZIONI INTEGRALI

Una *equazione integrale* è un'equazione avente la forma

$$Y(t) = F(t) + \int_a^b K(u,t)\,Y(u)\,du \qquad (1)$$

dove $F(t)$ e $K(u, t)$ sono date, a e b sono o costanti date o funzioni di t e la funzione $Y(t)$ che compare sotto segno di integrale deve invece essere determinata.

La funzione $K(u, t)$ è detta anche *nucleo* dell'equazione integrale. Se a e b sono delle costanti, l'equazione è detta anche *equazione integrale di Fredholm*. Se a è una costante, mentre $b = t$, l'equazione è detta *equazione integrale di Volterra.*

E' possibile trasformare una equazione differenziale lineare in un'equazione integrale. Si vedano al riguardo i problemi 1-3 e 25.

EQUAZIONI INTEGRALI TIPO CONVOLUZIONI

Un'equazione integrale particolarmente importante ai fini applicativi è

$$Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)\,Y(u)\,du \qquad (2)$$

Questa equazione è del *tipo convoluzione* e può essere scritta nella forma

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$$

Prendendo le trasformate di Laplace di entrambi i membri, assumendo che esistano sia $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ che $\mathcal{L}\{K(t)\} = k(s)$, si ha

$$y(s) = f(s) + k(s)\,y(s) \qquad \text{o} \qquad y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)}$$

La soluzione richiesta può poi essere trovata per inversione. Si vedano i problemi 5 e 6.

EQUAZIONE INTEGRALE DI ABEL. IL PROBLEMA DELLA TAUTOCRONA

Un'importante equazione integrale del tipo convoluzione è l'*equazione di Abel*

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = G(t) \qquad (3)$$

dove $G(t)$ è data e α è una costante tale per cui $0 < \alpha < 1$.

Un'applicazione dell'equazione integrale di Abel è la determinazione della configurazione di un filo senza attrito situato in un piano verticale tale per cui un cursore collocato sul filo scorra verso il suo punto più basso nello stesso tempo T indipendentemente dalla posizione iniziale in cui il cursore è collocato. Questo problema è detto problema della *tautocrona* e si dimostra che la configurazione del filo è una cicloide (v. problemi 7-9).

EQUAZIONI INTEGRALI-DIFFERENZIALI

Una *equazione integrale-differenziale* è una equazione integrale in cui possono figurare anche varie derivate della funzione incognita. Ad esempio

$$Y''(t) = Y(t) + \sin t + \int_0^t \cos(t-u)\,Y(u)\,du \qquad (4)$$

è un'equazione integrale-differenziale. La soluzione di una equazione del genere soggetta a condizioni iniziali date può spesso essere ottenuta applicando la trasformazione di Laplace (v. problema 10).

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE

Una equazione che lega la funzione $Y(t)$ ad una o più funzioni $Y(t-\alpha)$, dove α è una costante, è detta *equazione alle differenze.*

Esempio. $Y(t) - 4\,Y(t-1) + 3\,Y(t-2) = t$ è una equazione alle differenze.

In vari problemi pratici è possibile arrivare a formulare un'equazione alle differenze da cui poi si cerca di ottenere la funzione $Y(t)$ soggetta a condizioni date. La determinazione di tale funzione, che si dice *soluzione* dell'equazione alle differenze, può spesso essere fatta usando la trasformazione di Laplace (v. problema 11).

Anche equazioni alle differenze dove figurano relazioni tra termini dalla successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$, come ad es. $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ dove $a_0 = 0, a_1 = 1$, possono essere risolte con le trasformate di Laplace (v. problemi 18, 19 e 24).

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DIFFERENZE

Una *equazione differenziale alle differenze* è un'equazione alle differenze in cui possono figurare varie derivate della funzione $Y(t)$. Così ad es.

$$Y'(t) = Y(t-1) + 2t \qquad (5)$$

è un'equazione differenziale alle differenze (v. problema 12).

Si danno anche casi di equazioni integrali-differenziali alle differenze, cioè equazioni differenziali alle differenze nelle quali la funzione incognita $Y(t)$ può figurare anche sotto segno di integrale.

PROBLEMI RISOLTI

EQUAZIONI INTEGRALI

1. Trasformare l'equazione differenziale

$$Y''(t) - 3Y'(t) + 2Y(t) = 4\sin t, \qquad Y(0) = 1, \qquad Y'(0) = -2$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1.

Si ponga $Y''(t) = V(t)$. Allora usando la formula del problema 23, pag. 57, e le condizioni $Y'(0) = -2$ e $Y(0) = 1$,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du - 2, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 2t + 1$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$V(t) - 3\int_0^t V(u)\,du + 6 + 2\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du - 4t + 2 = 4\sin t$$

da cui si ha

$$V(t) = 4\sin t + 4t - 8 + \int_0^t \{3 - 2(t-u)\}\,V(u)\,du$$

Procedimento 2.

Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale data, si ha

$$\int_0^t \{Y''(u) - 3Y'(u) + 2Y(u)\}\,du = \int_0^t 4\sin u\,du$$

o

$$Y'(t) - Y'(0) - 3Y(t) + 3Y(0) + 2\int_0^t Y(u)\,du = 4 - 4\cos t$$

Usando la $Y'(0) = -2$ e $Y(0) = 1$, questa diventa

$$Y'(t) - 3Y(t) + 2\int_0^t Y(u)\,du = -1 - 4\cos t$$

Integrando nuovamente tra 0 e t come prima, si ha

$$Y(t) - Y(0) - 3\int_0^t Y(u)\,du + 2\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du = -t - 4\sin t$$

o

$$Y(t) + \int_0^t \{2(t-u) - 3\}\,Y(u)\,du = 1 - t - 4\sin t$$

2. Trasformare l'equazione differenziale

$$Y''(t) + (1-t)\,Y'(t) + e^{-t}\,Y(t) = t^3 - 5t, \qquad Y(0) = -3, \qquad Y'(0) = 4$$

in un'equazione integrale.

Procedimento 1.

Posto $Y''(t) = V(t)$ e sfruttando la relazione $Y'(0) = 4$, $Y(0) = -3$ si ha, come nel problema 1, procedimento 1,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du + 4, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t - 3$$

Così l'equazione differenziale diventa

$$V(t) + (1-t)\int_0^t V(u)\,du + 4(1-t) + e^{-t}\int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 4t\,e^{-t} - 3e^{-t} = t^3 - 5t$$

che può essere scritta nella forma

$$V(t) = t^3 - t - 4 + 3e^{-t} - 4t\,e^{-t} + \int_0^t \{t - 1 - e^{-t}(t-u)\}\,V(u)\,du$$

Procedimento 2.

Integrando entrambi i membri dell'equazione differenziale data come nel problema 1, procedimento 2, si ha

$$\int_0^t Y''(u)\,du + \int_0^t (1-u)\,Y'(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \int_0^t (u^3 - 5u)\,du$$

Integrando per parti nel secondo integrale, si ha

$$Y'(t) - Y'(0) + \left\{(1-u)\,Y(u)\Big|_0^t + \int_0^t Y(u)\,du\right\} + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

cioè

$$Y'(t) - Y'(0) + (1-t)\,Y(t) - Y(0) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2}$$

o

$$Y'(t) + (1-t)\,Y(t) + \int_0^t Y(u)\,du + \int_0^t e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^4}{4} - \frac{5t^2}{2} + 1$$

Una ulteriore integrazione tra 0 e t dà

$$Y(t) - Y(0) + \int_0^t (1-u)\,Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du + \int_0^t (t-u)\,e^{-u}\,Y(u)\,du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t$$

che può essere scritta nella forma

$$Y(t) + \int_0^t \{1 + t - 2u + (t-u)\,e^{-u}\}\,Y(u)\,du = \frac{t^5}{20} - \frac{5t^3}{6} + t - 3$$

3. Formulare come equazione integrale l'equazione differenziale

$$Y^{iv}(t) - 4Y'''(t) + 6Y''(t) - 4Y'(t) + Y(t) = 3\cos 2t$$

con le condizioni $Y(0) = -1$, $Y'(0) = 4$, $Y''(0) = 0$, $Y'''(0) = 2$.

Procedimento 1.

Sia $Y^{iv}(t) = V(t)$. Allora come nei problemi 1 e 2, si ha

$$Y'''(t) = \int_0^t V(u)\,du + 2, \qquad Y''(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + 2t$$

$$Y'(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^2}{2!}\,V(u)\,du + t^2 + 4, \qquad Y(t) = \int_0^t \frac{(t-u)^3}{3!}\,V(u)\,du + \frac{t^3}{3} + 4t - 1$$

Sostituendo queste nell'equazione differenziale data, questa diventa

$$V(t) = 25 - 16t + 4t^2 - \tfrac{1}{3}t^3 + 3\cos 2t + \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}\, V(u)\, du$$

Procedimento 2.

Integrando successivamente tra 0 e t come nel procedimento 2 di soluzione dei problemi 1 e 2, si ottiene l'equazione integrale

$$Y(t) - \int_0^t \{4 - 6(t-u) + 2(t-u)^2 - \tfrac{1}{6}(t-u)^3\}\, Y(u)\, du = -\frac{19}{16} + 8t - \frac{85t^2}{8} + 5t^3 + \frac{3}{16}\cos 2t$$

Queste equazioni integrali, come quelle ottenute nei problemi 1 e 2, sono *equazioni integrali di Volterra*; i limiti di integrazione sono 0 e t. In genere si ottiene questo tipo di equazioni integrali da equazioni differenziali le cui condizioni sono date tutte in un dato punto. Come esempio di *equazione integrale di Fredholm* che deriva da un'equazione differenziale lineare le cui condizioni sono date in due punti distinti, v. problema 25.

4. Trasformare l'equazione integrale

$$Y(t) = 3t - 4 - 2\sin t + \int_0^t \{(t-u)^2 - 3(t-u) + 2\}\, Y(u)\, du$$

in un'equazione differenziale.

Facendo uso della regola di Leibniz,

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} K(u,t)\, du = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial K}{\partial t}\, du + K\{b(t),t\}\frac{db}{dt} - K\{a(t),t\}\frac{da}{dt} \qquad (1)$$

Derivando entrambi i membri dell'equazione differenziale data si ha

$$Y'(t) = 3 - 2\cos t + \int_0^t 2(t-u)\, Y(u)\, du - 3\int_0^t Y(u)\, du + 2Y(t) \qquad (2)$$

Una derivazione ulteriore dà

$$Y''(t) = 2\sin t + 2\int_0^t Y(u)\, du - 3Y(t) + 2Y'(t) \qquad (3)$$

e un'ultima derivazione porta all'equazione differenziale cercata

$$Y'''(t) = 2\cos t + 2\,Y(t) - 3\,Y'(t) + 2\,Y''(t) \qquad (4)$$

o

$$Y''' - 2Y'' + 3Y' - 2Y = 2\cos t$$

Le condizioni iniziali ottenute ponendo $t = 0$ nell'equazione integrale data e nelle equazioni (*2*) e (*3*), sono

$$Y(0) = -4, \quad Y'(0) = -7, \quad Y''(0) = -2$$

Si noti che le condizioni iniziali sono contenute nell'equazione integrale.

E' possibile trasformare qualsiasi funzione differenziale in una funzione integrale. Tuttavia non tutte le equazioni integrali possono essere trasformate in equazioni differenziali. Questo ad es. è il caso dell'equazione integrale

$$Y(t) = \cos t + \int_0^t \ln(u+t)\, Y(u)\, du$$

EQUAZIONI INTEGRALI TIPO CONVOLUZIONI

5. Risolvere l'equazione integrale $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u)\sin(t-u)\, du$.

L'equazione integrale può essere scritta nella forma

$$Y(t) = t^2 + Y(t) * \sin t$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace e usando il teorema della convoluzione, si ha, per $y = \mathcal{L}\{Y\}$,

$$y = \frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$$

risolvendo

$$y = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

e quindi

$$Y = 2\left(\frac{t^2}{2!}\right) + 2\left(\frac{t^4}{4!}\right) = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

Il risultato può essere verificato per sostituzione diretta nell'equazione integrale.

6. Risolvere l'equazione integrale $\int_0^t Y(u)\, Y(t-u)\, du = 16\sin 4t$.

Questa equazione può essere scritta nella forma

$$Y(t) * Y(t) = 16\sin 4t$$

Prendendo la trasformata di Laplace si ha

$$\{y(s)\}^2 = \frac{64}{s^2+16} \quad \text{o} \quad y(s) = \frac{\pm 8}{\sqrt{s^2+16}}$$

Allora

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \pm 8 J_0(4t)$$

Così $Y(t) = 8J_0(4t)$ e $Y(t) = -8J_0(4t)$ sono entrambe soluzioni dell'equazione data.

EQUAZIONE INTEGRALE DI ABEL. IL PROBLEMA DELLA TAUTOCRONA

7. Risolvere l'equazione $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\, du = 1 + t + t^2$.

L'equazione può essere scritta nella forma

$$Y(t) * t^{-1/2} = 1 + t + t^2$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace, si ha

$$\mathcal{L}\{Y\}\,\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \mathcal{L}\{1 + t + t^2\}$$

o

$$\frac{y\,\Gamma(1/2)}{s^{1/2}} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}$$

e

$$y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{1}{s^{1/2}} + \frac{1}{s^{3/2}} + \frac{2}{s^{5/2}}\right\}$$

Prendendo l'antitrasformata, $Y = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\left\{\frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} + \frac{t^{1/2}}{\Gamma(3/2)} + \frac{2t^{3/2}}{\Gamma(5/2)}\right\}$

$$= \frac{1}{\pi}(t^{-1/2} + 2t^{1/2} + \tfrac{8}{3}t^{3/2}) = \frac{t^{-1/2}}{3\pi}(3 + 6t + 8t^2)$$

L'equazione integrale è un caso particolare di *equazione integralc di Abel.*

8. Un cursore è costretto a scorrere lungo un filo senza attrito che giace in un piano verticale. Supponendo che esso parta da un punto qualsiasi del filo in condizioni di riposo e cada, sotto l'azione della gravità, fino al punto più basso del filo, determinare il tempo che impiega ad arrivarvi.

Si assuma che il cursore abbia massa m e parta, da condizione di riposo, dal punto P di coordinate (u, v) come indicato in fig. 4-1. Sia Q di coordinate (x, y) un punto qualsiasi in cui passa il cursore nel suo movimento e si supponga di aver assunto come origine delle coordinate O il punto più basso del filo. Sia σ la lunghezza dell'arco OQ. Per il principio di conservazione dell'energia, si ha

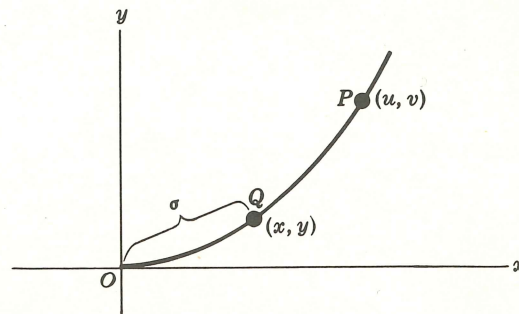



Fig. 4-1

En. potenziale in P + En. cinetica in P = En. potenziale in Q + En. cinetica in Q

$$\tfrac{1}{2}mgv + 0 = \tfrac{1}{2}mgy + \tfrac{1}{2}m\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2$$

dove $d\sigma/dt$ è la velocità istantanea della particella in Q. Allora

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 = 2g(v-y)$$

o, usando il fatto che σ diminuisce al crescere del tempo t,

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\sqrt{2g(v-y)} \qquad (1)$$

Il tempo complessivamente impiegato dal cursore per andare da P a O è

$$T = \int_0^T dt = \int_v^0 \frac{-d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} = \int_0^v \frac{d\sigma}{\sqrt{2g(v-y)}} \qquad (2)$$

Una volta data la configurazione della linea, la lunghezza dell'arco può essere espressa come funzione di y e si ha

$$d\sigma = F(y)\,dy \qquad (3)$$

In tal modo la (2) diventa

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)\,dy}{\sqrt{v-y}} \qquad (4)$$

In generale T è una funzione di v, cioè del punto di partenza.

9. Determinare la forma che deve avere il filo del problema 8 se si vuole che il tempo impiegato a raggiungere il punto più basso sia una costante, cioè indipendente dalla posizione di partenza.

In tal caso occorre determinare una $F(y)$ tale per cui

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^v \frac{F(y)}{\sqrt{v-y}}\,dy \qquad (1)$$

dove T è una costante. Questa equazione integrale del tipo convoluzione è un caso particolare di *equazione integrale di Abel* (v. pag. 113) e può essere scritta nella forma

$$\sqrt{2g}\,T = F(y) * y^{-1/2} \qquad (2)$$

Prendendo le trasformate di Laplace e tenendo conto che $\mathcal{L}\{F(y)\} = f(s)$, $\mathcal{L}\{y^{-1/2}\} = \Gamma(\frac{1}{2})/s^{1/2} = \sqrt{\pi}/s^{1/2}$, si ha

$$\frac{\sqrt{2g}\,T}{s} = f(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{1/2}} \quad \text{o} \quad f(s) = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}\,s^{1/2}}$$

L'antitrasformata di Laplace è data da

$$F(y) = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{1/2}}\right\} = \frac{T\sqrt{2g}}{\sqrt{\pi}}\frac{y^{-1/2}}{\Gamma(1/2)} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}y^{-1/2}$$

Poiché

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

si ha

$$\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi}y^{-1/2} \qquad (3)$$

Se si pone

$$\sqrt{b} = \frac{T\sqrt{2g}}{\pi} \quad \text{o} \quad b = \frac{2gT^2}{\pi^2} \qquad (4)$$

la (3) può essere scritta nella forma $1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{b}{y}$ o $\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{b-y}{y}}$

dato che la tangente deve essere positiva. Da qui integrando si ha

$$x = \int\sqrt{\frac{b-y}{y}}\,dy + c \qquad (5)$$

Ponendo $y = b\sin^2\theta$, questa può essere scritta nella forma

$$x = \int\sqrt{\frac{b\cos^2\theta}{b\sin^2\theta}}\cdot 2b\sin\theta\cos\theta\,d\theta + c$$

$$= 2b\int\cos^2\theta\,d\theta + c = b\int(1+\cos 2\theta)\,d\theta + c = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c$$

Così le equazioni parametriche della curva richiesta sono

$$x = \frac{b}{2}(2\theta + \sin 2\theta) + c, \quad y = b\sin^2\theta = \frac{b}{2}(1-\cos 2\theta)$$

Dato che essa deve passare per il punto $x = 0$, $y = 0$, si ha $c = 0$. Allora ponendo

$$a = \frac{b}{2} = \frac{gT^2}{\pi^2} \quad \text{e} \quad \phi = 2\theta$$

le equazioni parametriche sono

$$x = a(\phi + \sin\phi), \quad y = a(1-\cos\phi)$$

Queste sono le equazioni parametriche di una cicloide (v. fig. 4-2). Per una costante T data, il filo assume la forma della linea segnata a tratto intero nella figura. La cicloide è la traiettoria percorsa da un punto fisso della circonferenza di un cerchio che rotola lungo una retta data (v. problema 44).

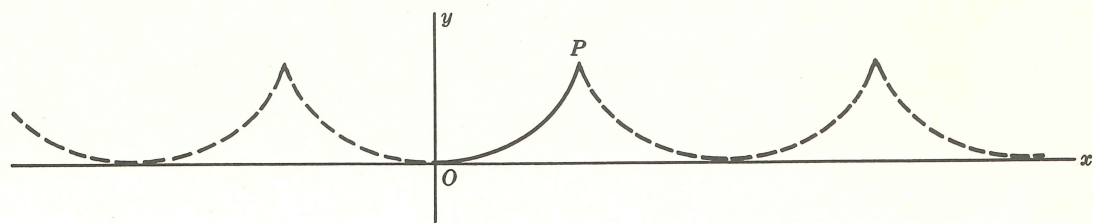



Fig. 4-2

EQUAZIONI INTEGRALI DIFFERENZIALI

10. Risolvere l'equazione $Y'(t) + 5\int_0^t \cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10$ con $Y(0) = 2$.

L'equazione può essere scritta nella forma

$$Y'(t) + 5 \cos 2t * Y(t) = 10$$

Prendendo la trasformata di Laplace si ha

$$sy - Y(0) + \frac{5sy}{s^2+4} = \frac{10}{s}$$

o

$$y = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)}$$

Da cui il problema 44, pag. 67,

$$Y = \frac{1}{27}(24 + 120t + 30 \cos 3t + 50 \sin 3t)$$

Si noti che per integrazione tra 0 e t con la condizione $Y(0) = 2$, l'equazione integrale differenziale data può essere trasformata nell'equazione integrale

$$Y(t) + 5\int_0^t (t-u) \cos 2(t-u)\, Y(u)\, du = 10t + 2$$

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DIFFERENZE

11. Risolvere l'equazione $3Y(t) - 4Y(t-1) + Y(t-2) = t$ con $Y(t) = 0$ per $t < 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i membri dell'equazione si ha

$$3\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \qquad (1)$$

Ora

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t-1)\, dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)}\, Y(u)\, du \qquad [\text{posto } t = u+1] \\ &= e^{-s}\int_{-1}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du + e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^{-s} y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y(t-2)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t-2)\, dt \\ &= \int_{-2}^\infty e^{-s(u+2)}\, Y(u)\, du \qquad [\text{posto } t = u+2] \\ &= e^{-2s}\int_{-2}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du + e^{-2s}\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^{-2s} y\end{aligned}$$

dato che $Y(u) = 0$ se $u < 0$, per cui

$$\int_{-1}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-2}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du = 0$$

Allora la (*1*) diventa $\quad 3y - 4e^{-s}y + e^{-2s}y = \dfrac{1}{s^2}$

e

$$\begin{aligned}y &= \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})} = \frac{1}{s^2(1-e^{-s})(3-e^{-s})} \\ &= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3-e^{-s}}\right\} \\ &= \frac{1}{2s^2}\left\{\frac{1}{1-e^{-s}} - \frac{1}{3(1-e^{-s}/3)}\right\} \\ &= \frac{1}{2s^2}\left\{(1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{3^2} + \frac{e^{-3s}}{3^3} + \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\frac{e^{-ns}}{s^2}\end{aligned}$$

Da cui

$$Y = \frac{t}{3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[t]}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$

dove $[t]$ è il numero intero più grande minore o eguale a t.

12. Risolvere l'equazione $Y'(t) + Y(t-1) = t^2$ con $Y(t) = 0$ per $t \leqq 0$.

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i membri si ottiene

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = 2/s^3 \qquad (1)$$

Ora

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} = s\mathcal{L}\{Y\} - Y(0) = sy - 0 = sy$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{Y(t-1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t-1)\, dt \\ &= \int_{-1}^\infty e^{-s(u+1)}\, Y(u)\, du \qquad [\text{posto } t = u+1] \\ &= e^{-s}\int_{-1}^0 e^{-su}\, Y(u)\, du + e^{-s}\int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^{-s} y\end{aligned}$$

Dato che $Y(u) = 0$ per $u \leqq 0$ per cui $\int_{-1}^{0} e^{-su}\, Y(u)\, du = 0$. Allora la (*1*) può essere scritta nella forma

$$sy + e^{-s}y = \frac{2}{s^3} \quad \text{o} \quad y = \frac{2}{s^3(s+e^{-s})}$$

Usando le serie, si ha

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{s^3(s+e^{-s})} = \frac{2}{s^4(1+e^{-s}/s)} \\ &= \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right) \\ &= \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}} \end{aligned}$$

Ora

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \begin{cases} \dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geqq n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Così se $[t]$ indica il numero intero più grande minore o eguale a t, si ha

$$Y(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} \qquad (2)$$

13. Determinare nel problema 12 (*a*) $Y(4)$, (*b*) $Y(\pi)$.

(*a*) Dato che $[4] = 4$, si ha

$$Y(4) = 2\sum_{n=0}^{4} \frac{(4-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{4^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{1^6}{6!}\right\} = 28{,}62 \text{ (circa)}$$

(*b*) Dato che $[\pi] = 3$, si ha

$$Y(\pi) = 2\sum_{n=0}^{3} \frac{(\pi-n)^{n+3}}{(n+3)!} = 2\left\{\frac{\pi^3}{3!} + \frac{(\pi-1)^4}{4!} + \frac{(\pi-2)^5}{5!} + \frac{(\pi-3)^6}{6!}\right\} = 12{,}12 \text{ (circa)}$$

14. Posto $F(t) = r^n$ per $n \leqq t < n+1$, $n = 0,1,2,3,\ldots$, determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \\ &= \int_0^1 e^{-st} r^0\, dt + \int_1^2 e^{-st} r^1\, dt + \int_2^3 e^{-st} r^2\, dt + \cdots \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} + r\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right) + r^2\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right) + \cdots \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} \end{aligned}$$

15. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

Per il problema 14, si ha $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = r^n$ per $n \leqq t < n+1$.

Altro procedimento.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{1-e^{-s}}{s} \cdot \frac{1}{1-re^{-s}} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \int_0^1 e^{-st} r^0\, dt + \int_1^2 e^{-st} r^1\, dt + \int_2^3 e^{-st} r^2\, dt + \cdots \\ &= \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \end{aligned}$$

dove $F(t) = r^n$ per $n \leqq t < n+1$, $n = 0,1,2,3,\ldots$.

16. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$.

Se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, allora per il *teorema 2-4*, pag. 44,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s} f(s)\} = \begin{cases} F(t-1) & t > 1 \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

Quindi per il problema 15,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t-1) = r^n \quad \text{per} \quad n \leqq t-1 < n+1,\ n = 0,1,2,3,\ldots$$

o, il che è equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(1-e^{-s})e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = r^{n-1} \quad \text{per} \quad n \leqq t < n+1,\ n = 1,2,3,\ldots$$

17. Posto $Y(t) = a_n$ per $n \leqq t < n+1$ dove $n = 0,1,2,\ldots$. determinare (*a*) $\mathcal{L}\{Y(t+1)\}$ e (*b*) $\mathcal{L}\{Y(t+2)\}$ in termini di $\mathcal{L}\{Y(t)\} = y(s)$.

(*a*) Ponendo $t+1 = u$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{Y(t+1)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, Y(t+1)\, dt = e^s \int_1^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^s \int_0^\infty e^{-su}\, Y(u)\, du - e^s \int_0^1 e^{-su}\, Y(u)\, du \\ &= e^s y(s) - e^s \int_0^1 e^{-su} a_0\, du = e^s y(s) - \frac{a_0 e^s(1-e^{-s})}{s} \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che $Y(t) = a_0$ per $0 \leqq t < 1$.

(*b*) Ponendo $t+2=u$, si ha

$$\mathcal{L}\{Y(t+2)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,Y(t+2)\,dt$$

$$= e^{2s}\int_2^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du$$

$$= e^{2s}\left\{\int_0^\infty e^{-su}\,Y(u)\,du - \int_0^1 e^{-su}\,Y(u)\,du - \int_1^2 e^{-su}\,Y(u)\,du\right\}$$

$$= e^{2s}y(s) - e^{2s}\int_0^1 e^{-su}a_0\,du - e^{2s}\int_1^2 e^{-su}a_1\,du$$

$$= e^{2s}y(s) - \frac{a_0\,e^{2s}(1-e^{-s})}{s} - \frac{a_1\,e^{2s}(e^{-s}-e^{-2s})}{s}$$

$$= e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(a_0e^s+a_1)}{s}$$

dove si è sfruttato il fatto che $Y(t)=a_0$ per $0 \leqq t < 1$ e $Y(t)=a_1$ per $1 \leqq t < 2$.

18. Posto che $\{a_n\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, indica la successione delle costanti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ e supponendo che si abbia la *formula di ricorrenza* definita dalla equazione alle differenze

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

determinare la formula per a_n, cioè risolvere rispetto ad a_n la equazione alle differenze.

Si definisce la funzione

$$Y(t) = a_n, \qquad n \leqq t < n+1 \qquad \text{dove } n = 0,1,2,\ldots$$

Allora la formula di ricorrenza data diventa

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = 0 \qquad (1)$$

Prendendo la trasformata di Laplace della (*1*) e sfruttando il risultato del problema 17 con $a_0=0$, $a_1=1$, si ha

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})}{s} - 5e^s y(s) + 6y(s) = 0$$

o

$$(e^{2s}-5e^s+6)\,y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}$$

Allora $$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^{2s}-5e^s+6)} = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{(e^s-3)(e^s-2)}\right\}$$

$$= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^s-3} - \frac{1}{e^s-2}\right\} = \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\}$$

Da cui per il problema 15 invertendo si ha

$$a_n = 3^n - 2^n, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Verifica: Se $a_n = 3^n - 2^n$, allora $a_0=0$, $a_1=1$. Ed è anche

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = (3^{n+2}-2^{n+2}) - 5(3^{n+1}-2^{n+1}) + 6(3^n-2^n)$$

$$= 9\cdot 3^n - 4\cdot 2^n - 15\cdot 3^n + 10\cdot 2^n + 6\cdot 3^n - 6\cdot 2^n = 0$$

19. Risolvere l'equazione alle differenze

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n, \qquad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

L'unica differenza tra questo problema e il 18 è la presenza del termine di destra 4^n. Si scrive l'equazione nella forma

$$Y(t+2) - 5Y(t+1) + 6Y(t) = F(t) \qquad (1)$$

dove $Y(t) = a_n$, $F(t) = 4^n$ per $n \leqq t < n+1$, $n = 0,1,2,\ldots$.

Prendendo la trasformata di Laplace di entrambi i lati della (*1*) e sfruttando i risultati dei problemi 14 e 17, si trova se $y(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$,

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s}{s}(1-e^{-s}) - 5e^s y(s) + 6y(s) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-4e^{-s})}$$

Allora

$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-2)(e^s-3)} + \frac{1-e^{-s}}{s(e^s-2)(e^s-3)(1-4e^{-s})}$$

$$= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s}\left\{\frac{1}{e^s-3} - \frac{1}{e^s-2}\right\} + \frac{e^s-1}{s(e^s-2)(e^s-3)(e^s-4)}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{e^s-1}{s}\left\{\frac{1/2}{e^s-2} - \frac{1}{e^s-3} + \frac{1/2}{e^s-4}\right\}$$

$$= \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}}\right\} + \frac{1-e^{-s}}{s}\left\{\frac{1/2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-3e^{-s}} + \frac{1/2}{1-4e^{-s}}\right\}$$

Da cui, prendendo l'antitrasformata, sfruttando il risultato del problema 15, si ha

$$Y(t) = a_n = 3^n - 2^n + \tfrac{1}{2}\cdot 2^n - 3^n + \tfrac{1}{2}\cdot 4^n \qquad (2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\cdot 4^n - \tfrac{1}{2}\cdot 2^n = \tfrac{1}{2}(4^n - 2^n)$$

20. Determinare, nel problema 19, a_5.

Procedimento 1. Dalla soluzione (*2*) del problema 19, si ha

$$a_5 = \tfrac{1}{2}(4^5 - 2^5) = 496$$

Procedimento 2. Dalla equazione alle differenze data nel problema 19, per $n=0$ si ha

$$a_2 - 5a_1 + 6a_0 = 1$$

o, avendo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$a_2 = 1 + 5a_1 - 6a_0 = 6$$

Se $n=1$, $a_3 - 5a_2 + 6a_1 = 4$ per cui

$$a_3 = 4 + 5a_2 - 6a_1 = 28$$

Se $n=2$, $a_4 - 5a_3 + 6a_2 = 16$

$$a_4 = 16 + 5a_3 - 6a_2 = 16 + 5(28) - 6(6) = 120$$

Infine se $n=3$, $a_5 - 5a_4 + 6a_3 = 64$ per cui

$$a_5 = 64 + 5a_4 - 6a_3 = 64 + 5(120) - 6(28) = 496$$

PROBLEMI VARI

21. Risolvere l'equazione integrale

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t + \int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du$$

L'equazione integrale può essere scritta nella forma

$$Y(t) = \tfrac{1}{2}\sin 2t + Y(t) * Y(t)$$

Allora prendendo la trasformata di Laplace e usando il teorema della convoluzione, si ha

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \{y(s)\}^2 \quad \text{o} \quad \{y(s)\}^2 - y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0$$

Risolvendo si ottiene

$$y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

Così

$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{1}$$

e

$$y(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right) \tag{2}$$

Dalla (2) si ottiene la soluzione

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)\right\} = J_1(2t) \tag{3}$$

Il risultato (1) può essere posto anche nella forma

$$y(s) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}} - 2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$

Perciò una seconda soluzione è

$$Y(t) = \delta(t) - J_1(2t) \tag{4}$$

dove $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac.

La soluzione (3) è continua e limitata per $t \geqq 0$.

22. Determinare $\mathcal{L}\{F(t)\}$ se $F(t) = n,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{F(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt \\ &= \int_0^1 e^{-st}(0)\,dt + \int_1^2 e^{-st}(1)\,dt + \int_2^3 e^{-st}(2)\,dt + \cdots \\ &= (1)\left(\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s}\right) + (2)\left(\frac{e^{-2s}-e^{-3s}}{s}\right) + (3)\left(\frac{e^{-3s}-e^{-4s}}{s}\right) + \cdots \\ &= \frac{e^{-s}(1-e^{-s})}{s}(1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + 4e^{-3s} + \cdots)\end{aligned}$$

Ora poiché per $|x| < 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

derivando si ha

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Allora se $x = e^{-s}$, si ottiene

$$1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + \cdots = \frac{1}{(1-e^{-s})^2}$$

Perciò

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

23. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\}$ per (a) $r \neq 1$, (b) $r = 1$.

(a) Per la formula binomiale,

$$\begin{aligned}\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})} &= \frac{e^{-s}}{s}(1 + re^{-s} + r^2e^{-2s} + \cdots) \\ &= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{re^{-2s}}{s} + \frac{r^2e^{-2s}}{s} + \cdots \\ &= \mathcal{U}(t-1) + r\,\mathcal{U}(t-2) + r^2\,\mathcal{U}(t-3) + \cdots\end{aligned}$$

Perciò

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}\right\} = F(t) = \sum_{k=1}^{[t]} r^k \tag{1}$$

se $t \geqq 1$, e 0 se $t < 1$.

Se $n \leqq t < n+1$, la (1) diventa se $r \neq 1$,

$$r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r(r^n-1)}{r-1} \tag{2}$$

(b) Se $r = 1$ si trova che $F(t) = n,\ n \leqq t < n+1$. Ciò concorda con quanto visto nel problema 22.

24. Risolvere l'equazione alle differenze

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 16n, \qquad a_0 = 6,\ a_1 = 2$$

L'equazione data può essere scritta nella forma

$$Y(t+2) - 7Y(t+1) + 10Y(t) = F(t) \tag{1}$$

dove $Y(t) = a_n$, $F(t) = 16n$ per $n \leqq t < n+1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Sfruttando i problemi 17 e 22, la trasformata di Laplace della (1) è

$$e^{2s}y(s) - \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s} - 7e^s y(s) + \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s} + 10y(s) = \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

Allora
$$y(s) = \frac{e^s(1-e^{-s})(6e^s+2)}{s(e^s-5)(e^s-2)} - \frac{42e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-5)(e^s-2)} + \frac{16e^{-s}}{s(1-e^{-s})(e^s-5)(e^s-2)}$$

$$= e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{6e^s+2}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$
$$- 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{e^s}{(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$
$$+ \frac{16}{s}\left\{\frac{1}{(e^s-1)(e^s-5)(e^s-2)}\right\}$$

$$= e^s\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{e^s-5} - \frac{14/3}{e^s-2}\right\}$$
$$- 42\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{5/3}{e^s-5} - \frac{2/3}{e^s-2}\right\}$$
$$+ \frac{1}{s}\left\{\frac{4}{e^s-1} + \frac{4/3}{e^s-5} - \frac{16/3}{e^s-2}\right\}$$

$$= \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{32/3}{1-5e^{-s}} - \frac{14/3}{1-2e^{-s}}\right\}$$
$$- \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)\left\{\frac{70e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{28e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$
$$+ \frac{1}{s}\left\{\frac{4e^{-s}}{1-e^{-s}} + \frac{(4/3)e^{-s}}{1-5e^{-s}} - \frac{(16/3)e^{-s}}{1-2e^{-s}}\right\}$$

Ora per i problemi 14 e 22, si ha per $n \geqq 1$,

$$a_n = \frac{32}{3}\cdot 5^n - \frac{14}{3}\cdot 2^n - 70\cdot 5^{n-1} + 28\cdot 2^{n-1} + 4(n-1) + \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}(5^n-1) - \frac{16}{3}\cdot\frac{2}{1}(2^n-1)$$
$$= 4\cdot 2^n - 3\cdot 5^n + 4n + 5$$

25. Formulare l'equazione differenziale

$$Y''(t) + \lambda Y(t) = 0, \qquad Y(0) = 0,\ Y(1) = 0$$

dove λ è una costante, come equazione integrale.

Procedimento 1.

Ponendo $Y''(t) = V(t)$, si ha, se $Y'(0) = c$,

$$Y'(t) = \int_0^t V(u)\,du + c, \qquad Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + ct \tag{1}$$

Dato che $Y(1) = 0$, si deve avere

$$\int_0^1 (1-u)\,V(u)\,du + c = 0 \qquad \text{o} \qquad c = \int_0^1 (u-1)\,V(u)\,du$$

Allora dalla (*1*) si ha

$$Y(t) = \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + \int_0^1 (tu-t)\,V(u)\,du$$
$$= \int_0^t (t-u)\,V(u)\,du + \int_0^t (tu-t)\,V(u)\,du + \int_t^1 (tu-t)\,V(u)\,du$$
$$= \int_0^t (t-1)\,u\,V(u)\,du + \int_t^1 (u-1)\,t\,V(u)\,du$$

Questo può essere scritto nella forma $Y(t) = \int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du$

dove $K(t,u) = \begin{cases}(t-1)\,u & u<t\\ (u-1)\,t & u>t\end{cases}$. (Si noti che $K(t,u) = K(u,t)$, cioè $K(u,t)$ è *simmetrica*).

La equazione integrale richiesta è quindi

$$V(t) + \lambda\int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du = 0$$

o

$$V(t) = -\lambda\int_0^1 K(t,u)\,V(u)\,du$$

Procedimento 2.

Integrando entrambi i lati della equazione differenziale data tra 0 e t, si ha

$$Y'(t) - Y'(0) + \lambda\int_0^t Y(u)\,du = 0$$

Una ulteriore integrazione tra 0 e t dà

$$Y(t) - Y(0) - Y'(0)\,t + \lambda\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du = 0 \tag{1}$$

Dato che $Y(0) = 0$, la (*1*) diventa

$$Y(t) = Y'(0)\,t - \lambda\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du \tag{2}$$

Ponendo $t = 1$ e sfruttando la relazione $Y(1) = 0$, dalla (*2*) si ricava

$$Y'(0) = \lambda\int_0^1 (1-u)\,Y(u)\,du$$

Quindi la (*2*) diventa

$$Y(t) = \lambda\int_0^1 (t-tu)\,Y(u)\,du - \lambda\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du$$
$$= \lambda\int_0^t (t-tu)\,Y(u)\,du + \lambda\int_t^1 (t-tu)\,Y(u)\,du - \lambda\int_0^t (t-u)\,Y(u)\,du$$
$$= \lambda\int_0^t u(1-t)\,Y(u)\,du + \lambda\int_t^1 t(1-u)\,Y(u)\,du$$
$$= -\lambda\int_0^1 K(t,u)\,Y(u)\,du$$

dove $K(t,u) = \begin{cases}(t-1)\,u & u<t\\ (u-1)\,t & u>t\end{cases}$.

Le equazioni integrali ottenute in questo problema sono esempi particolari di *equazioni integrali di Fredholm* a nucleo simmetrico.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

EQUAZIONI INTEGRALI

Trasformare ognuna delle seguenti equazioni differenziali in equazioni integrali.

26. $Y''(t) + 2Y'(t) - 8Y(t) = 5t^2 - 3t, \quad Y(0) = -2, \; Y'(0) = 3.$

Risp. $V(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u)\, V(u)\, du = 5t^2 + 21t - 22, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) + \int_0^t (2 - 8t + 8u)\, Y(u)\, du = -2 - t + 5t^4/12 - t^3$

27. $2Y''(t) - 3Y'(t) - 2Y(t) = 4e^{-t} + 2\cos t, \quad Y(0) = 4, \; Y'(0) = -1.$

Risp. $2V(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3)\, V(u)\, du = 4e^{-t} + 2\cos t + 5 - 2t, \quad V(t) = Y''(t)$

o $2Y(t) + \int_0^t (2u - 2t - 3)\, Y(u)\, du = 6 - 10t + 4e^{-t} - 2\cos t$

28. $Y'''(t) + 8Y(t) = 3\sin t + 2\cos t, \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = -1, \; Y''(0) = 2.$

Risp. $V(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, V(u)\, du = 3\sin t + 2\cos t - 4t^2 + 4t, \quad V(t) = Y'''(t)$

o $Y(t) + 4\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du = 5t^2/2 + t - 3 + 3\cos t - 2\sin t$

29. $Y''(t) + \cos t\, Y(t) = e^{-t}, \quad Y(0) = -2, \; Y'(0) = 0.$

Risp. $V(t) + \int_0^t (t-u)\cos t\, V(u)\, du = e^{-t} + 2\cos t, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) + \int_0^t (t-u)\cos u\, Y(u)\, du = t - 3 + e^{-t}$

30. $Y''(t) - t\,Y'(t) + t^2\,Y(t) = 1 + t, \quad Y(0) = 4, \; Y'(0) = 2.$

Risp. $V(t) + \int_0^t (t^3 - t - ut^2)\, V(u)\, du = 1 + 3t - 4t^2 - 2t^3, \quad V(t) = Y''(t)$

o $Y(t) - \int_0^t (t - 2u + tu^2 - u^3)\, Y(u)\, du = t^2/2 + t^3/6 + 2t + 4$

31. $Y^{\text{iv}}(t) - 2t\,Y''(t) + (1 - t^2)\,Y(t) = 1 + 4t - 2t^2 + t^4, \quad Y(0) = 1, \; Y'(0) = 0, \; Y''(0) = -2, \; Y'''(0) = 0.$

Risp. $V(t) + \int_0^t \{\tfrac{1}{6}(t-u)^3(1 - t^2) - 2t(t-u)\}\, V(u)\, du = 0, \quad V(t) = Y^{\text{iv}}(t)$

o $Y(t) - \int_0^t \{2u(t-u) + 2(t-u)^2 + \tfrac{1}{6}(t-u)^3(1-u^2)\}\, Y(u)\, du$

$$= 1 - t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{180} + \frac{t^8}{1680}$$

Trasformare ognuna delle seguenti equazioni integrali in equazioni differenziali con le relative condizioni associate.

32. $Y(t) = 5\cos t + \int_0^t (t-u)\, Y(u)\, du$

Risp. $Y''(t) - Y(t) = -5\sin t, \quad Y(0) = 5, \; Y'(0) = 0$

33. $Y(t) = t^2 - 3t + 4 - 3\int_0^t (t-u)^2\, Y(u)\, du$

Risp. $Y'''(t) + 6\,Y(t) = 0, \quad Y(0) = 4, \; Y'(0) = -3, \; Y''(0) = 2$

34. $Y(t) + \int_0^t \{(t-u)^2 + 4(t-u) - 3\}\, Y(u)\, du = e^{-t}$

Risp. $Y'''(t) - 3\,Y''(t) + 4\,Y'(t) + 2\,Y(t) = -e^{-t}, \; Y(0) = 1, \; Y'(0) = 2, \; Y''(0) = 3$

35. $Y(t) - \int_0^t (t-u)\sec t\, Y(u)\, du = t$

Risp. $Y''(t) - 2\tan t\, Y'(t) - (1 + \sec t)\, Y(t) = -t - 2\tan t, \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = 1$

36. $Y(t) + \int_0^t (t^2 + 4t - ut - u - 2)\, Y(u)\, du = 0$

Risp. $Y'''(t) + (3t - 2)\,Y''(t) + (t + 10)\,Y'(t) + Y(t) = 0, \quad Y(0) = 0, \; Y'(0) = 0, \; Y''(0) = 0$

EQUAZIONI INTEGRALI TIPO CONVOLUZIONI

37. Risolvere l'equazione $Y(t) = t + 2\int_0^t \cos(t-u)\, Y(u)\, du.$

Risp. $Y(t) = t + 2 + 2(t-1)e^t$

38. (*a*) Dimostrare che l'equazione integrale

$$Y(t) = t + \tfrac{1}{6}\int_0^t (t-u)^3\, Y(u)\, du$$

ammette la soluzione $Y(t) = \tfrac{1}{2}(\sin t + \sinh t)$.

(*b*) La soluzione data in (*a*) è unica? Spiegare.

39. Determinare la soluzione continua della equazione integrale $\int_0^t Y(u)\, Y(t-u)\, du = 2\,Y(t) + t - 2.$

Risp. $Y(t) = 1$

40. Dimostrare che l'unica soluzione della equazione integrale $\int_0^t Y(u)\sin(t-u)\, du = Y(t)$ è la *soluzione banale* $Y(t) = 0$.

41. Discutere le soluzioni della equazione integrale $\int_0^t Y(u)\, G(t-u)\, du = Y(t)$.

EQUAZIONE INTEGRALE DI ABEL E IL PROBLEMA DELLA TAUTOCRONA

42. Risolvere l'equazione integrale $\int_0^t \frac{Y(u)}{\sqrt{t-u}}\, du = \sqrt{t}.$ *Risp.* $Y(t) = \tfrac{1}{2}$

43. Dimostrare che la soluzione dell'equazione integrale $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/3}}\, du = t(1+t)$ è $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\, t^{1/3}(3t + 2)$.

44. Una ruota circolare di raggio a (v. fig. 4-3) rotola lungo una retta, assunta come asse delle x. Dimostrare che un punto fisso del suo cerchione, O', originariamente in contatto con la retta in O, descrive la cicloide

$$x = a(\phi - \sin\phi), \quad y = a(1 - \cos\phi)$$

tratteggiata in fig. 4-3.

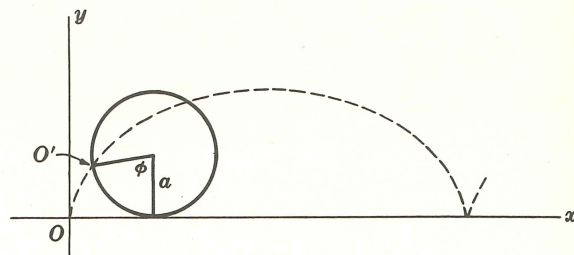



Fig. 4-3

45. Dimostrare che la curva determinata nel problema della tautocrona, pag. 118, è una cicloide e discutere la sua relazione con la curva del problema 44.

46. Dimostrare che il tempo richiesto dal cursore dei problemi 8 e 9 per scorrere dal punto più alto P del filo fino al punto più basso O (punto inferiore della cicloide) è $\pi\sqrt{a/g}$.

47. Se $0 < \alpha < 1$, dimostrare che la soluzione della equazione $\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^\alpha}\,du = F(t)$, supponendo che sia $F(0) = 0$, è

$$Y(t) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^t F'(u)\,(t-u)^{\alpha-1}\,du$$

48. Discutere le soluzioni della equazione integrale del problema 47 per $F(0) \neq 0$. Chiarire le osservazioni fatte considerando che

$$\int_0^t \frac{Y(u)}{(t-u)^{1/2}}\,du = 1 + t$$

EQUAZIONI INTEGRALI DIFFERENZIALI

49. Risolvere l'equazione $\int_0^t Y(u)\cos(t-u)\,du = Y'(t)$ se $Y(0) = 1$.

Risp. $Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$

50. Risolvere l'equazione $\int_0^t Y'(u)\,Y(t-u)\,du = 24t^3$ se $Y(0) = 0$.

Risp. $Y(t) = \pm 16t^{3/2}/\sqrt{\pi}$

51. (*a*) Dimostrare che l'equazione integrale del problema 49 può essere trasformata nella equazione integrale

$$1 + \int_0^t (t-u)\,Y(u)\cos(t-u)\,du = Y(t)$$

(*b*) Risolvere l'equazione integrale data in (*a*).

52. Risolvere l'equazione $\int_0^t Y''(u)\,Y'(t-u)\,du = Y'(t) - Y(t)$ se $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Risp. $Y(t) = 0$

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE E EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DIFFERENZE

53. Risolvere l'equazione $Y(t) - 3Y(t-1) + 2Y(t-2) = 1$ se $Y(t) = 0,\ t < 0$.

Risp. $Y(t) = 2^{[t]+2} - [t] - 3$

54. Dimostrare che la soluzione della equazione $Y'(t) = 2Y(t-1) + t$ se $Y(t) = 0,\ t < 0$ è

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{[t]} \frac{2^n(t-n)^{n+2}}{(n+2)!}$$

55. Risolvere l'equazione $Y''(t) - Y(t-1) = F(t)$ dove $Y(t) = 0,\ Y'(t) = 0$ per $t \leqq 0$, e

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leqq 0 \\ 2t & t > 0 \end{cases}$$

Risp. $Y(t) = 2\sum_{n=0}^{[t]} \frac{(t-n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$

56. Risolvere l'equazione $3Y(t) - 5Y(t-1) + 2Y(t-2) = F(t)$ se $Y(t) = 0,\ t < 0$, e

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$$

Risp. $Y(t) = \sum_{n=0}^{[t]} \{1 - (\frac{2}{3})^{n+1}\}(t-n)^2$

57. Risolvere le equazioni alle differenze

(*a*) $3a_{n+2} - 5a_{n+1} + 2a_n = 0$ se $a_0 = 1,\ a_1 = 0$.

(*b*) $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 3a_n = 0$ se $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

Risp. (*a*) $3(2/3)^n - 2$, (*b*) $\frac{1}{4}\{1 - (-3)^n\}$

58. I *numeri del Fibonacci* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sono definiti dalla relazione $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ dove $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. (*a*) Determinare i primi dieci numeri del Fibonacci. (*b*) Determinare la formula per a_n.

Risp. (*a*) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (*b*) $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

59. Risolvere l'equazione $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$ dove $a_0 = 1,\ a_1 = 4$.

Risp. $a_n = 2^n(n+1)$

60. Risolvere l'equazione $a_{n+2} - 2a_{n+1} + 2a_n = 0$ dove $a_0 = 0,\ a_1 = 1$.

Risp. $a_n = \{(1+i)^n - (1-i)^n\}/2i$

61. (*a*) Risolvere l'equazione $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = 0$ se $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1$. (*b*) Determinare a_{10}.

Risp. (*a*) $a_n = \frac{1}{3}\{2^n - (-1)^n\}$, (*b*) $a_{10} = 341$

62. (*a*) Dimostrare che una soluzione della equazione $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$ può essere ottenuta ponendo $a_n = r^n$ dove r è una costante incognita. (*b*) Usare questo procedimento per risolvere i problemi 57-61.

PROBLEMI VARI

63. Dimostrare che l'equazione differenziale non lineare

$$Y''(t) + \{Y(t)\}^2 = t\sin t, \qquad Y(0) = 1,\ Y'(0) = -1$$

può essere scritta nella forma della equazione integrale

$$Y(t) + \int_0^t (t-u)\,\{Y(u)\}^2\,du = 3 - t - 2\cos t - t\sin t$$

64. Risolvere l'equazione $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = 2Y(t) + \frac{1}{6}t^3 - 2t$.

Risp. $Y(t) = t$ o $Y(t) = 2\delta(t) - t$

65. Trasformare le seguenti equazioni in equazioni integrali: $Y''(t) - Y(t) = 3\cos t - \sin t$, $Y(\pi) = 1$, $Y'(\pi) = -2$.
Risp. $V(t) = 2\pi + 1 - 2t + 3\cos t - \sin t + \int_\pi^t (t-u)\,V(u)\,du$, dove $V(t) = Y''(t)$

66. Risolvere l'equazione $Y(t) = t + \int_0^t Y(u)\,J_1(t-u)\,du$.

Risp. $Y(t) = \frac{1}{2}(t^2+1)\int_0^t J_0(u)\,du + \frac{1}{2}t\,J_0(t) - \frac{1}{2}t^2 J_1(t)$

67. Determinare $G(x)$ tale per cui sia $\int_0^x G(u)\,G(x-u)\,du = 8(\sin x - x\cos x)$. *Risp.* $G(x) = \pm 4\sin x$

68. Risolvere l'equazione $\int_0^t Y(u)\,Y(t-u)\,du = t + 2Y(t)$.

Risp. $Y(t) = J_1(t) - \int_0^t J_0(u)\,du$ o $Y(t) = 2\,\delta(t) - J_1(t) + \int_0^t J_0(u)\,du$

69. Risolvere le seguenti equazioni alle differenze usando il metodo delle trasformate di Laplace
(*a*) $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2n + 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.
(*b*) $a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 24n - 8$, $a_0 = 3$, $a_1 = -5$.
Risp. (*a*) $a_n = \frac{5}{2}\cdot 3^n - 5\cdot 2^n + n + \frac{5}{2}$ (*b*) $a_n = 2n^2 - 4n + 2 + (-5)^n$

70. Risolvere le equazioni (*a*) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = n + 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.
(*b*) $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$.
Risp. (*a*) $a_n = \frac{1}{4}(3n-1)(-1)^n + \frac{1}{4}(n+1)$ (*b*) $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\cdot 5^n - \frac{1}{3}\cdot 2^n$

71. Risolvere l'equazione $a_{n+3} - 2a_{n+2} - a_{n+1} + 2a_n = n^2 + 2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.
Risp. $a_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{6}n - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{6}n\cdot 2^n - \frac{2}{9}\cdot 2^n - \frac{1}{9}(-1)^n$

72. (*a*) Dimostrare che una soluzione particolare del problema 69(*a*) può essere trovata ponendo $a_n = A + Bn$ dove A e B sono costanti incognite. (*b*) Usando il risultato ottenuto in (*a*) e il metodo seguito nel problema 62, mostrare come ottenere la soluzione del problema 69 (*a*). (*c*) Come si può trasformare il procedimento seguito nelle parti (*a*) e (*b*) per renderlo utilizzabile per la risoluzione dei problemi 69 (*b*), 70 (*a*), 70 (*b*) e 71?

73. Determinare tutte le funzioni continue $F(t)$ per le quali sia $\int_0^t u\,F(u)\cos(t-u)\,du = te^{-t} - \sin t$.
Risp. $F(t) = -2e^{-t}$

74. Dimostrare che la equazione differenziale non lineare $Y''(t) + 2Y'(t) = Y^3(t)$, $Y(0) = 0$, $Y(1) = 0$ può essere scritta nella forma delle equazioni integrali

$$Y(t) = \int_0^t (2t-2)\,Y(u)\,du + \int_t^1 2t\,Y(u)\,du + \int_0^1 K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

o
$$Y(t) = \int_0^t (2-2t)e^{2(u-t)}\,Y(u)\,du - \int_t^1 2te^{2(u-t)}\,Y(u)\,du + \int_0^1 e^{-2t}K(t,u)\,Y^3(u)\,du$$

dove
$$K(t,u) = \begin{cases} u(t-1) & u < t \\ t(u-1) & u > t \end{cases}.$$

75. Risolvere rispetto a $Y(t)$ l'equazione $8Y(t) - 12Y(t-1) + 4Y(t-2) = F(t)$ dove $Y(t) = 0$ per $t < 0$ e

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

Risp. $Y(t) = \frac{1}{8}e^{-t}\left\{1 + \sum_{n=0}^{[t]} (2-2^{-n})e^n\right\}$

76. Se

$$Y'_n(t) = \beta\{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$
$$Y'_0(t) = -\beta\,Y_0(t)$$

dove $Y_n(0) = 0$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$, $Y_0(0) = 1$ e β è una costante, determinare $Y_n(t)$.

Risp. $Y_n(t) = \dfrac{(\beta t)^n e^{-\beta t}}{n!}$

77. Risolvere il problema 76 quando la prima equazione è sostituita da

$$Y'_n(t) = \beta_n\{Y_{n-1}(t) - Y_n(t)\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

dove $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ sono delle costanti.

78. Dare una dimostrazione diretta della proprietà tautocrona della cicloide.

79. Il *problema della brachistocrona* consiste nella determinazione della configurazione del filo senza attrito giacente in un piano verticale, come indicato in fig. 4-1, pag. 118, tale per cui un cursore collocato in P scorra fino al punto O nel tempo minimo. La soluzione di questo problema è la cicloide come indicato in fig. 4-2, pag. 120. Dimostrare questa proprietà per il caso particolare (*a*) di una linea retta e (*b*) di una parabola che congiungano i punti P ed O.

80. Determinare la configurazione di un filo senza attrito giacente in un piano verticale tale per cui un cursore vincolato ad esso discenda al punto più basso in un tempo proporzionale alla componente verticale della sua distanza da esso.
Risp. $x = a(1 - \cos^3\theta)$, $y = \frac{3}{2}a\sin^2\theta$

CAPITOLO 5

Teoria delle variabili complesse

IL SISTEMA DEI NUMERI COMPLESSI

Dato che non esiste alcun numero reale x che soddisfa all'equazione $x^2 + 1 = 0$ o a equazioni simili, si introduce l'insieme dei numeri complessi.

Si può affermare che i numeri complessi hanno la forma $a + bi$ dove a e b sono numeri reali detti rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* e $i = \sqrt{-1}$ è detta *unità immaginaria.* Due numeri complessi $a + bi$ e $c + di$ sono *eguali* se e solo se $a = c$ e $b = d$. I numeri reali possono essere considerati come un sottoinsieme dell'insieme dei numeri complessi con $b = 0$. Il numero complesso $0 + 0i$ corrisponde al numero reale 0.

Il *valore assoluto* o *modulo* di $a + bi$ è $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il *complesso coniugato* di $a + bi$ è il numero $a - bi$. Spesso il complesso coniugato del numero complesso z è indicato con il simbolo $\bar{z}$ o z^*.

Nell'eseguire le operazioni con i numeri complessi, si può procedere come nell'algebra dei numeri reali, sostituendo ogni volta che se ne presenta il caso i^2 con -1. Per i numeri complessi non sono definite relazioni di disuguaglianza.

Dal punto di vista di una definizione assiomatica dei numeri complessi, conviene considerare un numero complesso come una coppia ordinata (a, b) di numeri reali a e b soggetta ad alcune regole operative che risultano coincidere con quelle date sopra. Così ad es. si pone per definizione $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, $m(a, b) = (ma, mb)$, ecc. Si trova allora che $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ e questo viene associato all'espressione $a + bi$ dove i è il simbolo che rappresenta $(0, 1)$.

FORMA POLARE DEI NUMERI COMPLESSI

Se si adottano scale reali su due assi reciprocamente perpendicolari $X'OX$ e $Y'OY$ (gli assi x e y) come indicato in fig. 5-1, ogni punto del piano definito dai due assi può essere definito tramite una coppia ordinata di numeri (x, y) detti *coordinate ortogonali* del punto. In fig. 5-1 sono indicati esempi di definizioni di questo genere per i punti P, Q, R, S e T.

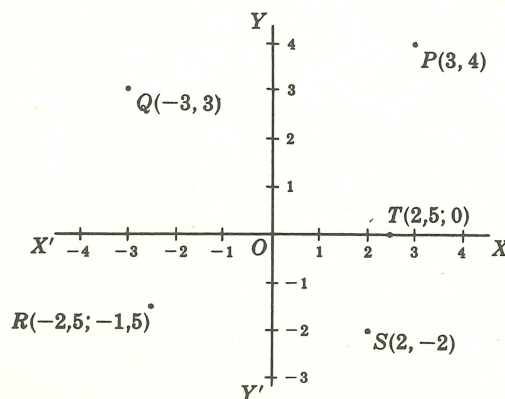



Fig. 5-1

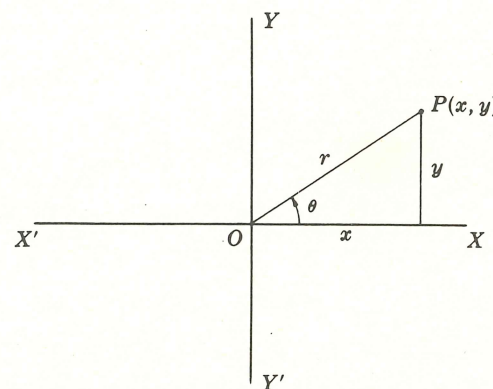



Fig. 5-2

Dato che anche un numero complesso $x + iy$ può essere considerato come una coppia ordinata (x, y), tali numeri possono essere rappresentati da punti del *piano complesso* o *diagramma di Argand.* Riferendosi alla fig. 5-2 si vede che

$$x = r \cos\theta, \qquad y = r \sin\theta \qquad (1)$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x + iy|$ e θ, detta *anomalia* o *argomento*, è l'angolo che la retta OP forma con l'asse positivo delle x, OX. Ne segue che

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i \sin\theta) \qquad (2)$$

detta *forma polare* o trigonometrica del numero complesso, dove r e θ sono dette *coordinate polari.* Conviene a volte scrivere $\text{cis}\,\theta$ al posto di $\cos\theta + i \sin\theta$.

OPERAZIONI IN FORMA POLARE. TEOREMA DI DE MOIVRE

Se $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ e $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$, si può dimostrare che

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)\} \qquad (4)$$

$$z^n = \{r(\cos\theta + i \sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \qquad (5)$$

dove n è un numero reale qualsiasi. La formula (5) è detta anche *teorema di De Moivre.*

In termini della *formula di Eulero*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

le (3), (4) e (5) possono essere scritte nella forma suggestiva

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \qquad (6)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \qquad (7)$$

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} \qquad (8)$$

RADICI DEI NUMERI COMPLESSI

Se n è un numero intero positivo, usando il teorema di De Moivre si ha

$$z^{1/n} = \{r(\cos\theta + i \sin\theta)\}^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left\{\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right\} \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (9)$$

o, il che è equivalente,

$$z^{1/n} = (re^{i\theta})^{1/n} = \{re^{i(\theta + 2k\pi)}\}^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta + 2k\pi)/n} \qquad (10)$$

da cui segue che esistono n differenti valori di $z^{1/n}$, $z \neq 0$. Le considerazioni fatte possono essere facilmente estese a $z^{m/n}$.

FUNZIONI

Se ad ogni valore di un dato insieme di numeri complessi che può essere assunto dalla variabile z corrispondono uno o più valori di una variabile w, si dice che w è una funzione della variabile complessa z, e si scrive $w = f(z)$.

Una funzione è ad *un solo valore* se ad ogni valore assunto da z corrisponde un solo valore di w; in caso contrario si dice che la funzione è a *più valori*. In generale si può scrivere $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, dove u e v sono funzioni reali di x e y.

Esempio. $w = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u + iv$ per cui $u(x,y) = x^2 - y^2$, $v(x,y) = 2xy$. Esse sono dette rispettivamente la *parte reale* e la *parte immaginaria* della funzione $w = z^2$.

Se non diversamente stabilito, nel seguito si assume sempre che $f(z)$ sia ad un solo valore. Una funzione a più valori può essere considerata come un gruppo di funzioni ad un solo valore.

LIMITI E CONTINUITA'

Le definizioni di limite e di continuità per una funzione di variabile complessa sono analoghe a quelle già note per funzioni di variabile reale. Infatti si dice che $f(z)$ ha come *limite* l per z che tende a z_0 se, dato $\epsilon > 0$ qualsiasi, è possibile determinare un $\delta > 0$ tale per cui $|f(z) - l| < \epsilon$ per ogni $0 < |z - z_0| < \delta$.

Analogamente, si dice che $f(z)$ è *continua* in z_0 se, dato $\epsilon > 0$ qualsiasi, è possibile determinare un $\delta > 0$ tale per cui $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ per ogni $|z - z_0| < \delta$. Alternativamente $f(z)$ è continua in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

DERIVATE

Se $f(z)$ in una qualche regione del piano z è ad un solo valore, la *derivata* di $f(z)$, indicata con $f'(z)$, è definita come

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{11}$$

a condizione che tale limite esista e sia indipendente dal modo in cui $\Delta z \to 0$. Se per $z = z_0$, il limite (*11*) esiste, si dice che $f(z)$ è *derivabile* in z_0. Se il limite esiste per tutti i valori di z per i quali $|z - z_0| < \delta$ per un certo $\delta > 0$, si dice che $f(z)$ è *analitica* in z_0. Se il limite esiste per tutti i valori di z di una regione $\mathcal{R}$, si dice che $f(z)$ è *analitica* in $\mathcal{R}$. Per essere analitica $f(z)$ deve essere ad un sol valore e continua. L'inverso non è necessariamente vero.

Varie funzioni elementari della variabile complessa z sono state definite come estensione naturale delle corrispondenti funzioni di variabile reale. Quando della funzione reale $f(x)$ esiste lo sviluppo in serie, si può usare come definizione la serie dove a x si sostituisce z.

Esempio 1. Si definisce $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$, $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$. Da esse si può dimostrare che $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, così come altre numerose relazioni.

Esempio 2. a^b e $e^{b \ln a}$ sono state definite anche per a e b complessi. Dato che $e^{2k\pi i} = 1$, ne segue $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$ e si definisce $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Quindi $\ln z$ è una funzione a più valori. Le varie funzioni ad un sol valore di cui è composta tale funzione a più valori sono dette *rami* della funzione a più valori.

Le regole di derivazione delle funzioni di variabile complessa sono per lo più le stesse valide per la derivazione di funzioni di variabile reale. Quindi $\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$, $\frac{d}{dz}(\sin z) = \cos z$, etc.

EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Condizione necessaria perché $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ sia analitica nella regione è che u e v soddisfino alle *equazioni di Cauchy-Riemann*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{12}$$

(v. problema 12). Se le derivate parziali della (*12*) sono continue nella regione $\mathcal{R}$, le equazioni sono anche condizione sufficiente perché $f(z)$ sia analitica in $\mathcal{R}$.

Se le derivate seconde di u e v rispetto a x e y esistono e sono continue, derivando le (*12*) si trova che

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

Quindi le parti reale e immaginaria soddisfano all'equazione di Laplace a due dimensioni. Le funzioni che soddisfano all'equazione di Laplace sono dette *funzioni armoniche*.

INTEGRALI DI LINEA

Sia C una linea del piano xy congiungente i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2). L'integrale

$$\int_C P\,dx + Q\,dy \qquad \text{o} \qquad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy$$

dove P e Q sono funzioni di x e y, è detto *integrale di linea* lungo la curva C. Si tratta di una generalizzazione alle linee dell'integrale del calcolo elementare. Come nel calcolo elementare, anche in questo caso l'integrale può essere definito come il limite di una somma.

Due importanti proprietà degli integrali di linea sono:

1. $$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = -\int_{(x_2,y_2)}^{(x_1,y_1)} P\,dx + Q\,dy$$

2. Se (x_3, y_3) è un qualsiasi altro punto di C, allora
$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_3,y_3)} P\,dx + Q\,dy + \int_{(x_3,y_3)}^{(x_2,y_2)} P\,dx + Q\,dy$$

Se C è una *linea semplice chiusa* (cioè non interseca se stessa in alcun punto) come in fig. 5-3, l'integrale di linea lungo C, percorsa in senso positivo o antiorario, è indicato con

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy$$

Per il calcolo degli integrali di linea, si veda il problema 15.

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

Sia C una linea semplice chiusa che delimita la regione $\mathcal{R}$ (v. fig. 5-3). Si supponga che P, Q e le loro derivate parziali prime rispetto a x e y siano continue in $\mathcal{R}$ e lungo C. Allora si ha

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy \quad = \quad \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

che è detto *teorema di Green nel piano*.

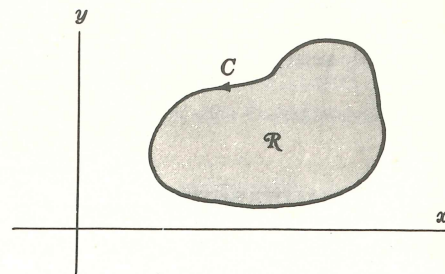



Fig. 5-3

INTEGRALI

Se $f(z)$ è definita, ad un sol valore e continua in una regione $\mathcal{R}$, si definisce *l'integrale* di $f(z)$ lungo un qualsiasi percorso C di $\mathcal{R}$ tra il punto z_1 e il punto z_2, dove $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, come

$$\int_C f(z)\,dz \quad = \quad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u + iv)(dx + i\,dy) \quad = \quad \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} u\,dx - v\,dy \; + \; i\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} v\,dx + u\,dy$$

Con questa definizione l'integrale di una funzione di variabile complessa può essere fatto dipendere da integrali di linea. Una definizione alternativa basata sul limite di una somma, come si adotta per le funzioni di variabile reale, può anch'essa essere formulata e si può dimostrare che le due definizioni sono equivalenti.

Le regole per l'integrazione delle funzioni di variabile complessa sono simili a quelle dell'integrazione delle funzioni di variabile reale. Un risultato importante è che

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \quad \leqq \quad \int_C |f(z)|\,|dz| \quad \leqq \quad M\int_C ds \quad = \quad ML \tag{14}$$

dove M è una limitazione superiore di $|f(z)|$ su C, cioè $|f(z)| \leqq M$, ed L è la lunghezza del percorso C.

TEOREMA DI CAUCHY

Sia C una linea semplice chiusa. Se $f(z)$ è analitica nella regione delimitata da C e su C stessa, vale allora il *teorema di Cauchy* (v. problema 19).

$$\oint_C f(z)\,dz \quad = \quad 0 \tag{15}$$

In altre parole, la (*15*) equivale a dire che il valore di $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$ è *indipendente dal percorso* che collega z_1 a z_2. Integrali del genere possono quindi essere calcolati come $F(z_2) - F(z_1)$ dove $F'(z) = f(z)$.

Esempio. Dato che $f(z) = 2z$ è analitica in tutto il piano, per una linea semplice chiusa C qualsiasi si ha

$$\oint_C 2z\,dz \quad = \quad 0$$

E anche $\displaystyle\int_{2i}^{1+i} 2z\,dz \; = \; z^2\Big|_{2i}^{1+i} \; = \; (1+i)^2 - (2i)^2 \; = \; 2i + 4$

FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY

Se $f(z)$ è analitica all'interno e sulla linea semplice chiusa C qualsiasi ed a è un qualsiasi punto interno a C, allora

$$f(a) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz \tag{16}$$

dove C è percorsa in senso positivo (antiorario).

Inoltre, la derivata n-esima di $f(z)$ in $z = a$ è data da

$$f^{(n)}(a) \quad = \quad \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \tag{17}$$

Queste sono dette *formule integrali di Cauchy*. Esse sono notevoli perché affermano che se una funzione $f(z)$ è nota *sulla* linea chiusa C, essa è per ciò stesso nota anche *dentro* C e possono essere calcolate anche le sue varie derivate nei punti interni a C. Quindi se una funzione di variabile complessa ammette una prima derivata, essa ammette anche le derivate di tutti gli ordini superiori. Ciò non è necessariamente vero per funzioni di variabili reali, come noto.

SERIE DI TAYLOR

Sia $f(z)$ analitica all'interno e su una circonferenza con centro in $z = a$. Allora per tutti i punti z interni alla circonferenza si ha la rappresentazione di $f(z)$ in *serie di Taylor* data da

$$f(z) \quad = \quad f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots \tag{18}$$

(v. problema 29).

PUNTI SINGOLARI

Un punto singolare di una funzione $f(z)$ è un valore di z per il quale z non è analitica. Se $f(z)$ è analitica in tutta una regione salvo un suo punto interno $z = a$, si dice che $z = a$ è una *singolarità isolata* di $f(z)$.

Esempio. Se $f(z) = \dfrac{1}{(z-3)^2}$, allora $z = 3$ è una singolarità isolata di $f(z)$.

POLI

Se $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $\phi(a) \neq 0$, dove $\phi(z)$ è analitica in tutta una regione che comprende $z = a$, e se n è un numero intero positivo, allora $f(z)$ ha una singolarità isolata in $z = a$ che è detta *polo di ordine n*. Se $n = 1$, si dice anche che il *polo* è *semplice*; se $n = 2$ si parla di *polo doppio*, ecc.

Esempio 1. $f(z) = \dfrac{z}{(z-3)^2(z+1)}$ ha due singolarità: un polo di ordine 2 o polo doppio in $z = 3$ e un polo di ordine 1 o polo semplice in $z = -1$.

Esempio 2. $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2+4} = \dfrac{3z-1}{(z+2i)(z-2i)}$ ha due poli semplici in $z = \pm 2i$.

Una funzione può presentare anche altri tipi di singolarità oltre ai poli. Ad es. $f(z) = \sqrt{z}$ ha un *punto di diramazione* in $z = 0$ (v. problema 45). La funzione $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ ha una singolarità in $z = 0$. Tuttavia, dato che il $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z}$ ha un valore finito, tale singolarità è detta *eliminabile*.

SERIE DI LAURENT

Se $f(z)$ presenta un polo di ordine n in $z = a$, ma è analitica in tutti gli altri punti posti all'interno e su una circonferenza C con centro in a, allora $(z-a)^n f(z)$ è analitica in tutti i punti posti dentro e su C e ammette intorno al punto $z = a$ uno sviluppo in serie di Taylor per cui

$$f(z) \quad = \quad \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots \qquad (19)$$

Questo sviluppo è detto *serie di Laurent* di $f(z)$. La parte $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$ è detta *parte analitica*, mentre la parte restante, costituita da potenze negative di $z - a$, è detta *parte principale*. Più in generale, ci si riferisce alle serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-a)^k$ come serie di Laurent di cui i termini con $k < 0$ costituiscono la parte principale. Una funzione analitica in una regione limitata da due circonferenze concentriche con centro in $z = a$ può sempre essere sviluppata in serie di Laurent del tipo visto (v. problema 119).

In base alle serie di Laurent è possibile definire vari tipi di singolarità di una funzione $f(z)$. Ad es., quando la parte principale di una serie di Laurent ha un numero finito di termini e $a_{-n} \neq 0$ mentre $a_{-n-1}, a_{-n-2}, \ldots$ sono tutti nulli, allora $z = a$ è un polo di ordine n. Se la parte principale ha un numero infinito di termini diversi da zero, si dice che $z = a$ è una *singolarità essenziale* o anche un *polo di ordine infinito*.

Esempio. La funzione $e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots$ presenta una singolarità essenziale in $z = 0$.

RESIDUI

I coefficienti che figurano nella (*19*) possono essere determinati nel solito modo scrivendo i coefficienti della corrispondente serie di Taylor per $(z-a)^n f(z)$. Ai fini di ulteriori sviluppi, il coefficiente a_{-1}, detto il *residuo* di $f(z)$ nel polo $z = a$, assume una importanza particolare. Esso può essere determinato con la formula

$$a_{-1} \quad = \quad \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \qquad (20)$$

dove n è l'ordine del polo. Per poli semplici, la determinazione del residuo è particolarmente semplice dato che la formula si riduce a

$$a_{-1} \quad = \quad \lim_{z\to a} (z-a) f(z) \qquad (21)$$

TEOREMA DEI RESIDUI

Se $f(z)$ è analitica in una regione $\mathcal{R}$ fatta eccezione per un polo di ordine n in $z = a$ e se C è una qualsiasi linea semplice chiusa di $\mathcal{R}$ che racchiude il punto $z = a$, allora $f(z)$ ha la forma (*19*). Integrando la (*19*), tenendo conto del fatto che

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{se } n = 1 \end{cases} \qquad (22)$$

(v. problema 21), risulta che

$$\oint_C f(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i a_{-1} \qquad (23)$$

cioè l'integrale di $f(z)$ lungo un percorso chiuso che circonda un polo semplice di $f(z)$ è eguale a $2\pi i$ volte il residuo in quel polo.

Più in generale vale il seguente importante

Teorema. Se $f(z)$ è analitica all'interno e sopra il contorno C di una regione $\mathcal{R}$ eccezion fatta per un numero finito di poli $a, b, c, \ldots$ interni a $\mathcal{R}$, aventi rispettivamente residui $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$ allora

$$\oint_C f(z)\,dz \quad = \quad 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \cdots) \qquad (24)$$

cioè l'integrale di $f(z)$ è eguale a $2\pi i$ volte la somma dei residui di $f(z)$ nei poli racchiusi da C. Il teorema di Cauchy e le formule integrali di Cauchy sono casi particolari della formula (*24*) che è detta *teorema dei residui.*

CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI

Il calcolo di vari integrali definiti può spesso essere condotto sfruttando il teorema dei residui assieme ad una opportuna funzione $f(z)$ ed un opportuno percorso o contorno C, la cui scelta può anche richiedere molta ingegnosità. I tipi più ricorrenti nella pratica sono i seguenti.

1. $\int_0^{\infty} F(x)\,dx$, $F(x)$ è una funzione pari.

   Si consideri $\oint_C F(z)\,dz$ lungo un contorno C costituito da un segmento sull'asse x tra $-R$ e $+R$ e dal semicerchio sopra l'asse x avente come diametro il segmento sopra indicato. Quindi si ponga $R \to \infty$ (v. problemi 37, 38).

2. $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)\,d\theta$, G è una funzione razionale di $\sin\theta$ e $\cos\theta$.

   Sia $z = e^{i\theta}$. Allora $\sin\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}$ e $dz = ie^{i\theta}\,d\theta$ o $d\theta = dz/iz$.

   L'integrale dato equivale a $\oint_C F(z)\,dz$ dove C è il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine (v. problemi 39, 40).

3. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos mx \\ \sin mx \end{Bmatrix} dx$, $F(x)$ è una funzione razionale.

   In questo caso si consideri $\oint_C F(z)\,e^{imz}\,dz$ dove C è un contorno eguale a quello del tipo 1 (v. problema 42).

4. Integrali vari implicanti contorni particolari (v. problemi 43, 46).

PROBLEMI RISOLTI

NUMERI COMPLESSI

1. Eseguire le operazioni indicate.

(a) $(4-2i)+(-6+5i) = 4-2i-6+5i = 4-6+(-2+5)i = -2+3i$

(b) $(-7+3i)-(2-4i) = -7+3i-2+4i = -9+7i$

(c) $(3-2i)(1+3i) = 3(1+3i)-2i(1+3i) = 3+9i-2i-6i^2 = 3+9i-2i+6 = 9+7i$

(d) $$\frac{-5+5i}{4-3i} = \frac{-5+5i}{4-3i}\cdot\frac{4+3i}{4+3i} = \frac{(-5+5i)(4+3i)}{16-9i^2} = \frac{-20-15i+20i+15i^2}{16+9}$$
$$= \frac{-35+5i}{25} = \frac{5(-7+i)}{25} = \frac{-7}{5}+\frac{1}{5}i$$

(e) $$\frac{i+i^2+i^3+i^4+i^5}{1+i} = \frac{i-1+(i^2)(i)+(i^2)^2+(i^2)^2 i}{1+i} = \frac{i-1-i+1+i}{1+i}$$
$$= \frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{i-i^2}{1-i^2} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

(f) $|3-4i|\,|4+3i| = \sqrt{(3)^2+(-4)^2}\sqrt{(4)^2+(3)^2} = (5)(5) = 25$

(g) $$\left|\frac{1}{1+3i}-\frac{1}{1-3i}\right| = \left|\frac{1-3i}{1-9i^2}-\frac{1+3i}{1-9i^2}\right| = \left|\frac{-6i}{10}\right| = \sqrt{(0)^2+(-\tfrac{6}{10})^2} = \frac{3}{5}$$

2. Dati due numeri complessi z_1 e z_2, dimostrare che $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Sia $z_1 = x_1+iy_1$, $z_2 = x_2+iy_2$. Allora

$$|z_1z_2| = |(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)| = |x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+x_2y_1)|$$
$$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2} = \sqrt{x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2}$$
$$= \sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2} = |x_1+iy_1|\,|x_2+iy_2| = |z_1|\,|z_2|$$

3. Risolvere l'equazione $z^3-2z-4 = 0$.

Le radici razionali possibili sono $\pm1, \pm2, \pm4$. Per tentativi si trova che $z=2$ è una radice. Allora l'equazione data può essere scritta nella forma $(z-2)(z^2+2z+2) = 0$. Le soluzioni dell'*equazione quadratica* $az^2+bz+c = 0$ sono $z = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Per $a=1$, $b=2$, $c=2$ ciò porta a $z = \dfrac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2\pm\sqrt{-4}}{2} = \dfrac{-2\pm2i}{2} = -1\pm i$.

L'insieme delle soluzioni è $2, -1+i, -1-i$.

FORMA POLARE DEI NUMERI COMPLESSI

4. Mettere in forma polare (a) $3+3i$, (b) $-1+\sqrt{3}i$, (c) -1, (d) $-2-2\sqrt{3}i$ (v. fig. 5-4).

(a) Argomento $\theta = 45° = \pi/4$ radianti. Modulo $r = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$. Allora
$$3+3i = r(\cos\theta+i\sin\theta) = 3\sqrt{2}(\cos\pi/4+i\sin\pi/4) = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\pi/4 = 3\sqrt{2}\,e^{\pi i/4}$$

(b) Argomento $\theta = 120° = 2\pi/3$ radianti. Modulo $r = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Allora
$$-1+\sqrt{3}i = 2(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3) = 2\,\mathrm{cis}\,2\pi/3 = 2e^{2\pi i/3}$$

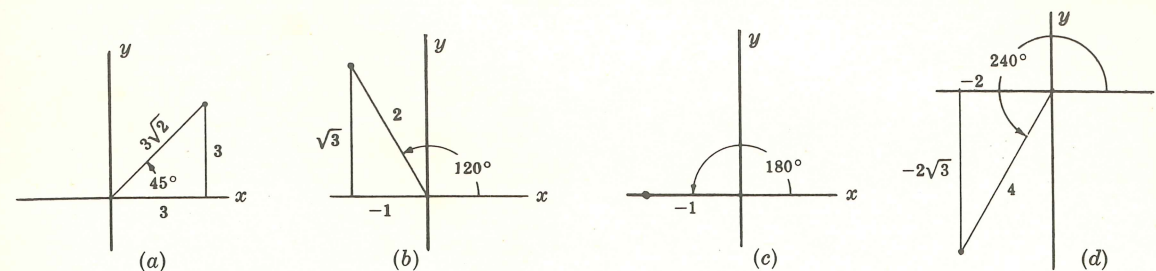



Fig. 5-4

(c) Argomento $\theta = 180° = \pi$ radianti. Modulo $r = \sqrt{(-1)^2+(0)^2} = 1$. Allora
$$-1 = 1(\cos\pi+i\sin\pi) = \mathrm{cis}\,\pi = e^{\pi i}$$

(d) Argomento $\theta = 240° = 4\pi/3$ radianti. Modulo $r = \sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4$. Allora
$$-2-2\sqrt{3} = 4(\cos 4\pi/3+i\sin 4\pi/3) = 4\,\mathrm{cis}\,4\pi/3 = 4e^{4\pi i/3}$$

5. Calcolare (a) $(-1+\sqrt{3}i)^{10}$, (b) $(-1+i)^{1/3}$.

(a) Per il problema 4(b) e il teorema di De Moivre,
$$(-1+\sqrt{3}i)^{10} = [2(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3)]^{10} = 2^{10}(\cos 20\pi/3+i\sin 20\pi/3)$$
$$= 1024[\cos(2\pi/3+6\pi)+i\sin(2\pi/3+6\pi)] = 1024(\cos 2\pi/3+i\sin 2\pi/3)$$
$$= 1024(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}i) = -512+512\sqrt{3}i$$

(b) $-1+i = \sqrt{2}(\cos 135°+i\sin 135°) = \sqrt{2}[\cos(135°+k\cdot360°)+i\sin(135°+k\cdot360°)]$

Allora
$$(-1+i)^{1/3} = (\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{135°+k\cdot360°}{3}\right)+i\sin\left(\frac{135°+k\cdot360°}{3}\right)\right]$$

I risultati per $k = 0, 1, 2$ sono

$\sqrt[6]{2}(\cos 45°+i\sin 45°)$,

$\sqrt[6]{2}(\cos 165°+i\sin 165°)$,

$\sqrt[6]{2}(\cos 285°+i\sin 285°)$

I risultati per $k = 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ sono ripetizioni di questi valori. Queste radici complesse sono rappresentate geometricamente nel piano complesso dai punti P_1, P_2, P_3 sulla circonferenza di fig. 5-5.

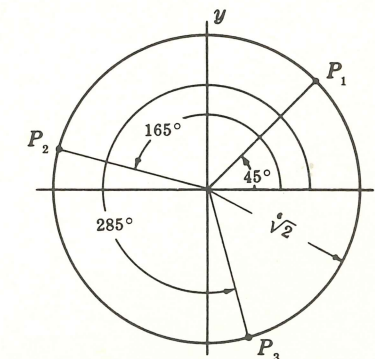



Fig. 5-5

6. Determinare il luogo rappresentato da

(a) $|z-2| = 3$, (b) $|z-2| = |z+4|$, (c) $|z-3|+|z+3| = 10$.

(a) **Procedimento 1** $|z-2| = |x+iy-2| = |x-2+iy| = \sqrt{(x-2)^2+y^2} = 3$ o $(x-2)^2+y^2 = 9$, un cerchio con centro in $(2,0)$ e raggio 3.

Procedimento 2. $|z-2|$ è la distanza tra i numeri complessi $z = x+iy$ e $2+0i$. Se questa distanza è sempre 3, il luogo cercato è una circonferenza di raggio 3 e centro in $2+0i$ o $(2,0)$.

(*b*) **Procedimento 1.** $|x+iy-2| = |x+iy+4|$ o $\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+4)^2+y^2}$. Elevando a quadrato, si ha $x = -1$, una linea retta.

Procedimento 2. Il luogo cercato è tale che le distanze tra qualsiasi suo punto e i punti $(2,0)$ e $(-4,0)$ sono eguali. Quindi il luogo cercato è la mediana del segmento che congiunge i punti $(2,0)$ e $(-4,0)$, cioè $x = -1$.

(*c*) **Procedimento 1.** Il luogo è dato da $\sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 10$ o $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2+y^2}$. Elevando a quadrato e semplificando, $25 + 3x = 5\sqrt{(x+3)^2+y^2}$.

Elevando a quadrato e semplificando un'altra volta si ha $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, una ellisse con i semiassi maggiore e minore lunghi rispettivamente 5 e 4.

Procedimento 2. Il luogo cercato è tale che la somma delle distanze di ogni suo punto dai punti $(3,0)$ e $(-3,0)$ è 10. Quindi esso è una ellisse i cui fuochi sono nei punti $(-3,0)$ e $(3,0)$ e il cui asse maggiore è lungo 10.

7. Determinare la regione del piano z rappresentata da ognuna delle seguenti espressioni.

(*a*) $|z| < 1$.

Interno del cerchio di raggio 1 (v. fig. 5-6 (*a*)).

(*b*) $1 < |z+2i| \leqq 2$.

$|z+2i|$ è la distanza tra z e $-2i$, per cui $|z+2i| = 1$ è un cerchio di raggio 1 e centro in $-2i$ cioè $(0,-2)$; e $|z+2i| = 2$ è un cerchio di raggio 2 e centro in $-2i$. Allora $1 < |z+2i| \leqq 2$ rappresenta la regione dei punti esterni a $|z+2i| = 1$ ma *interni* o posti *sopra* $|z+2i| = 2$ (v. fig. 5-6 (*b*)).

(*c*) $\pi/3 \leqq \arg z \leqq \pi/2$.

Si noti che $\arg z = \theta$, dove $z = re^{i\theta}$. La regione cercata è la regione illimitata delimitata dalle rette $\theta = \pi/3$ e $\theta = \pi/2$ comprese (v. fig. 5-6 (*c*)).

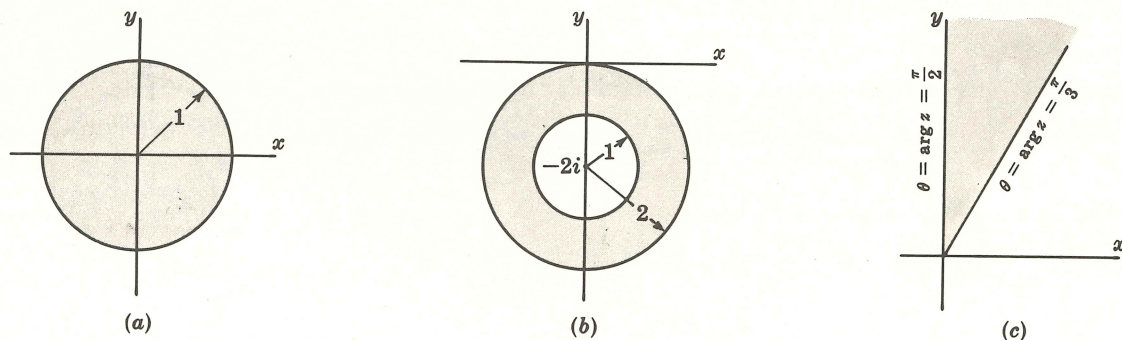



Fig. 5-6

8. Esprimere le funzioni date nella forma $u(x,y) + i\,v(x,y)$, dove u e v sono reali:

(*a*) z^3, (*b*) $1/(1-z)$, (*c*) e^{3z}, (*d*) $\ln z$.

(*a*) $w = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$= x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Allora $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$.

(*b*) $$w = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(x+iy)} = \frac{1}{1-x-iy}\cdot\frac{1-x+iy}{1-x+iy} = \frac{1-x+iy}{(1-x)^2+y^2}$$

Allora $u(x,y) = \dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

(*c*) $e^{3z} = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i\sin 3y)$ e $u = e^{3x}\cos 3y$, $v = e^{3x}\sin 3y$

(*d*) $\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\tan^{-1} y/x$ e

$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $v = \tan^{-1} y/x$

Si noti che $\ln z$ è una funzione a più valori (nel caso particolare a *infiniti* valori) dato che θ può essere aumentato di un qualsiasi multiplo di 2π. Il *valore principale* del logaritmo è per definizione quello per il quale $0 \leqq \theta < 2\pi$ ed è anche detto *ramo principale* di $\ln z$.

9. Dimostrare che (*a*) $\sin(x+iy) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$

(*b*) $\cos(x+iy) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$.

Si usano le relazioni $e^{iz} = \cos z + i\sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i\sin z$, da cui

Allora $$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \sin(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\}$$

$$= (\sin x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + i(\cos x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y$$

Analogamente,

$$\cos z = \cos(x+iy) = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\{e^{ix-y} + e^{-ix+y}\} = \tfrac{1}{2}\{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)\}$$

$$= (\cos x)\left(\frac{e^y+e^{-y}}{2}\right) - i(\sin x)\left(\frac{e^y-e^{-y}}{2}\right) = \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y$$

DERIVATE. EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

10. Dimostrare che $\dfrac{d}{dz}\bar{z}$, dove $\bar{z}$ è la coniugata di z, non esiste in alcun punto.

Per definizione $\dfrac{d}{dz}f(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ se questo limite esiste ed è indipendente dal modo in cui $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ tende a zero. Allora

$$\frac{d}{dz}\bar{z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\overline{z+\Delta z} - \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\,\Delta y} - \overline{x+iy}}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{x - iy + \Delta x - i\,\Delta y - (x-iy)}{\Delta x + i\,\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x - i\,\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Se $\Delta y = 0$, il limite richiesto è $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

Se $\Delta x = 0$, il limite richiesto è $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{-i\,\Delta y}{i\,\Delta y} = -1$.

Questi due possibili percorsi di avvicinamento allo zero dimostrano che il limite dipende dal modo in cui $\Delta z \to 0$, per cui la derivata non esiste; cioè $\bar{z}$ *non* è *analitica* in nessun punto.

11. (*a*) Data $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$, determinare $\dfrac{dw}{dz}$ (*b*) Determinare dove w non è analitica.

(*a*) **Procedimento 1.**

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\dfrac{1+(z+\Delta z)}{1-(z+\Delta z)} - \dfrac{1+z}{1-z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}$$

$$= \frac{2}{(1-z)^2} \text{ a condizione che } z \neq 1, \text{ indipendentemente dal modo in cui } \Delta z \to 0.$$

Procedimento 2. A condizione che $z \neq 1$ si possono applicare le normali regole di derivazione. Quindi per la regola di derivazione del quoziente,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{(1-z)\dfrac{d}{dz}(1+z) - (1+z)\dfrac{d}{dz}(1-z)}{(1-z)^2} = \frac{(1-z)(1)-(1+z)(-1)}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1-z)^2}$$

(*b*) La funzione è analitica dappertutto eccezion fatta per $z = 1$, dove la derivata non esiste: cioè la funzione è non analitica in $z = 1$.

12. Dimostrare che condizione necessaria perché $w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ sia analitica in una data regione è che in quella regione siano soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Dato che $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, si ha

$$f(z+\Delta z) = f[x+\Delta x + i(y+\Delta y)] = u(x+\Delta x, y+\Delta y) + i\,v(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

Allora

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) + i\{v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\}}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

Se $\Delta y = 0$, il limite richiesto è

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\left\{\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right\} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se $\Delta x = 0$, il limite richiesto è

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\,\Delta y} + \left\{\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}\right\} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Se la derivata esiste, i due particolari limiti calcolati devono essere eguali, cioè

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

per cui deve essere $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Inversamente si può dimostrare che se le derivate parziali prime di u e v rispetto a x e y sono continue in una data regione, le equazioni di Cauchy-Riemann sono anche condizione sufficiente per l'analiticità di $f(z)$.

13. (*a*) Se $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ è analitica in una regione $\mathcal{R}$, dimostrare che le famiglie di linee parametriche $u(x,y) = C_1$ e $v(x,y) = C_2$ sono famiglie ortogonali. (*b*) Illustrare la tesi riferendosi alla funzione $f(z) = z^2$.

(*a*) Si considerino due qualsiasi membri di queste famiglie $u(x,y) = u_0$, $v(x,y) = v_0$ che si intersechino nel punto (x_0, y_0).

Dato che $du = u_x\,dx + u_y\,dy = 0$, si ha $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{u_x}{u_y}$.

Inoltre dato che $dv = v_x\,dx + v_y\,dy = 0$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{v_x}{v_y}$.

Calcolate in (x_0, y_0), queste rappresentano rispettivamente le tangenti delle due linee nel punto di intersezione.

Per le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, si ha che il prodotto delle tangenti nel punto (x_0, y_0) è eguale a

$$\left(-\frac{u_x}{u_y}\right)\left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -1$$

per cui due qualsiasi membri delle rispettive famiglie sono ortogonali e quindi le due famiglie sono ortogonali.

(*b*) Se $f(z) = z^2$, allora $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Il diagramma di vari membri di $x^2 - y^2 = C_1$, $2xy = C_2$ è riportato in fig 5-7.

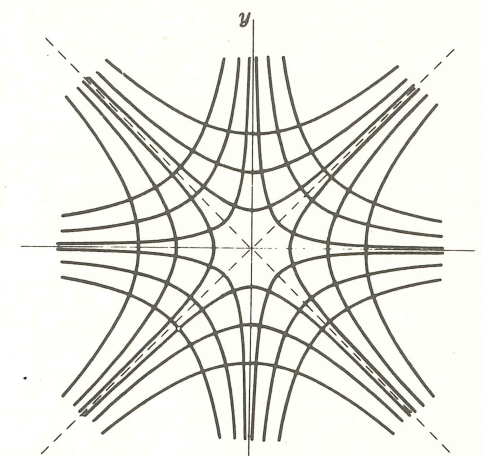



Fig. 5-7

14. In aerodinamica e meccanica dei fluidi, le funzioni ϕ e ψ di $f(z) = \phi + i\psi$, con $f(z)$ analitica, sono dette rispettivamente *potenziale di velocità* e *funzione di corrente*. Posto $\phi = x^2 + 4x - y^2 + 2y$, (*a*) determinare ψ e (*b*) determinare $f(z)$.

(*a*) Per le equazioni di Cauchy-Riemann, $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$. Allora

$$(1)\quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x + 4 \qquad (2)\quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 2y - 2$$

Procedimento 1. Integrando la (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$.
Integrando la (*2*), $\psi = 2xy - 2x + G(y)$.

Queste sono identiche se $F(x) = -2x + c$, $G(y) = 4y + c$ dove c è una costante reale qualsiasi. Quindi $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

Procedimento 2.

Integrando la (*1*), $\psi = 2xy + 4y + F(x)$. Quindi sostituendo nella (*2*), $2y + F'(x) = 2y - 2$ o $F'(x) = -2$ e $F(x) = -2x + c$. Per cui $\psi = 2xy + 4y - 2x + c$.

(*b*) Dalla (*a*),

$$\begin{aligned} f(z) &= \phi + i\psi = x^2 + 4x - y^2 + 2y + i(2xy + 4y - 2x + c) \\ &= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x+iy) - 2i(x+iy) + ic \\ &= z^2 + 4z - 2iz + c_1 \end{aligned}$$

dove c_1 è una costante immaginaria.

Allo stesso risultato si arriva anche osservando che $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ per cui $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Il risultato si ottiene allora per sostituzione; i termini dove figura $\bar{z}$ scompaiono.

INTEGRALI DI LINEA

15. Calcolare $\int_{(0,1)}^{(1,2)} (x^2 - y)\,dx + (y^2 + x)\,dy$ lungo (*a*) il segmento di retta tra (0, 1) e (1, 2), (*b*) i segmenti di retta tra (0, 1) e (1, 1) e tra (1, 1) e (1, 2), (*c*) la parabola $x = t,\ y = t^2 + 1$.

(*a*) L'equazione della retta del piano xy che passa per (0, 1) e (1,2) è $y = x + 1$. Allora $dx = dy$ e l'integrale di linea è

$$\int_{x=0}^{1} \{x^2 - (x+1)\}\,dx + \{(x+1)^2 + x\}\,dx = \int_0^1 (2x^2 + 2x)\,dx = 5/3$$

(*b*) Lungo il segmento tra (0, 1) e (1, 1), $y = 1$ e $dy = 0$ per cui l'integrale di linea vale

$$\int_{x=0}^{1} (x^2 - 1)\,dx + (1 + x)(0) = \int_0^1 (x^2 - 1)\,dx = -2/3$$

Lungo il segmento tra (1, 1) e (1, 2), $x = 1$, $dx = 0$ e l'integrale di linea vale

$$\int_{y=1}^{2} (1 - y)(0) + (y^2 + 1)\,dy = \int_1^2 (y^2 + 1)\,dy = 10/3$$

Quindi il valore richiesto è $= -2/3 + 10/3 = 8/3$.

(*c*) Dato che in (0, 1) $t = 0$ e in (1, 2) $t = 1$, l'integrale di linea vale

$$\int_{t=0}^{1} \{t^2 - (t^2 + 1)\}\,dt + \{(t^2 + 1)^2 + t\}\,2t\,dt = \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)\,dt = 2$$

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO

16. Dimostrare il teorema di Green nel piano se C è una linea semplice chiusa che gode della proprietà che qualsiasi retta parallela agli assi coordinati la taglia al massimo in due punti.

Fig. 5-8

Si supponga che le equazioni delle linee AEB e AFB (v. fig. 5-8) siano rispettivamente $y = Y_1(x)$ e $y = Y_2(x)$. Se $\mathcal{R}$ è la regione delimitata da C, si ha

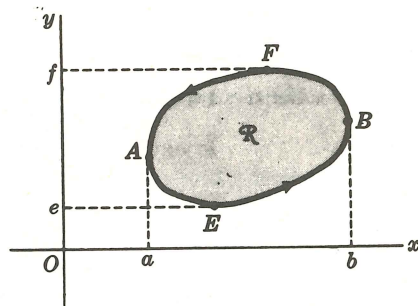
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} P(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)}\,dx = \int_a^b [P(x, Y_2) - P(x, Y_1)]\,dx$$

$$= -\int_a^b P(x, Y_1)\,dx - \int_b^a P(x, Y_2)\,dx = -\oint_C P\,dx$$

Allora

$$(1) \qquad \oint_C P\,dx = -\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Analogamente si supponga che le equazioni delle linee EAF e EBF siano rispettivamente $x = X_1(y)$ e $x = X_2(y)$. Allora

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f} \left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\right] dy = \int_e^f [Q(X_2, y) - Q(X_1, y)]\,dy$$

$$= \int_f^e Q(X_1, y)\,dy + \int_e^f Q(X_2, y)\,dy = \oint_C Q\,dy$$

Allora

$$(2) \qquad \oint_C Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Sommando la (*1*) e la (*2*), $\displaystyle\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$

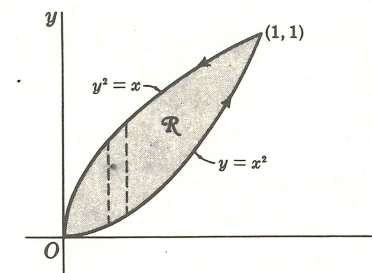
Si possono fare facilmente generalizzazioni ad altre linee semplici chiuse.

17. Verificare il teorema di Green nel piano per

$$\oint_C (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

dove C è il contorno chiuso della regione delimitata da $y = x^2$ e $y^2 = x$.

Fig. 5-9

Le linee piane $y = x^2$ e $y^2 = x$ si intersecano nei punti (0, 0) e (1, 1). La direzione positiva di percorrenza di C è quella indicata in fig. 5-9.

Lungo $y = x^2$, l'integrale di linea vale

$$\int_{x=0}^{1} \{(2x)(x^2) - x^2\}\,dx + \{x + (x^2)^2\}\,d(x^2) = \int_0^1 (2x^3 + x^2 + 2x^5)\,dx = 7/6$$

Lungo $y^2 = x$, l'integrale di linea vale

$$\int_{y=1}^{0} \{2(y^2)(y) - (y^2)^2\}\,d(y^2) + \{y^2 + y^2\}\,dy = \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2)\,dy = -17/15$$

Allora l'integrale richiesto è $= 7/6 - 17/15 = 1/30$.

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left\{\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right\} dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (1 - 2x)\,dx\,dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)\,dx = 1/30$$

Quindi il teorema di Green è verificato.

INTEGRALI, TEOREMA DI CAUCHY, FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY

18. Calcolare $\displaystyle\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz$

(*a*) lungo la parabola $x = t,\ y = t^2$ dove $1 \leq t \leq 2$,

(*b*) lungo il segmento di retta tra $1 + i$ e $2 + 4i$,

(*c*) lungo i segmenti di retta tra $1 + i$ e $2 + i$ e tra questo e $2 + 4i$.

Si ha

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x+iy)^2(dx+i\,dy) = \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2+2ixy)(dx+i\,dy)$$

$$= \int_{(1,1)}^{(2,4)} (x^2-y^2)\,dx - 2xy\,dy + i\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$$

Procedimento 1.

(*a*) I punti $(1,1)$ e $(2,4)$ corrispondono rispettivamente a $t=1$ e $t=2$. Quindi gli integrali di linea sopra riportati diventano

$$\int_{t=1}^{2} \{(t^2-t^4)\,dt - 2(t)(t^2)2t\,dt\} + i\int_{t=1}^{2} \{2(t)(t^2)\,dt + (t^2-t^4)(2t)\,dt\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

(*b*) La retta che passa per i punti $(1,1)$ e $(2,4)$ ha l'equazione $y-1 = \frac{4-1}{2-1}(x-1)$ o $y = 3x-2$. Allora si ha

$$\int_{x=1}^{2} \{[x^2-(3x-2)^2]\,dx - 2x(3x-2)3\,dx\}$$

$$+ i\int_{x=1}^{2} \{2x(3x-2)\,dx + [x^2-(3x-2)^2]3\,dx\} = -\frac{86}{3} - 6i$$

(*c*) Tra i punti $1+i$ e $2+i$ [ossia tra i punti $(1,1)$ e $(2,1)$], $y=1$ e $dy=0$ e si ha

$$\int_{x=1}^{2} (x^2-1)\,dx + i\int_{x=1}^{2} 2x\,dx = \frac{4}{3} + 3i$$

Tra $2+i$ e $2+4i$ [ossia tra $(2,1)$ e $(2,4)$], $x=2$ e $dx=0$ e si ha

$$\int_{y=1}^{4} -4y\,dy + i\int_{y=1}^{4} (4-y^2)\,dy = -30 - 9i$$

Sommando, $\left(\frac{4}{3}+3i\right) + (-30-9i) = -\frac{86}{3} - 6i.$

Procedimento 2.

Gli integrali di linea sono indipendenti dal percorso (v. problema 19), il che spiega i valori eguali ottenuti testè in (*a*), (*b*) e (*c*). In tal caso, l'integrale può essere calcolato direttamente, come nel campo delle variabili reali, nel modo seguente:

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{1+i}^{2+4i} = \frac{(2+4i)^3}{3} - \frac{(1+i)^3}{3} = -\frac{86}{3} - 6i$$

19. (*a*) Dimostrare il teorema di Cauchy: Se $f(z)$ è analitica all'interno e sopra una linea semplice chiusa C, allora $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

(*b*) A queste condizioni, dimostrare che $\int_{P_1}^{P_2} f(z)\,dz$ è indipendente dal percorso che unisce P_1 e P_2.

(*a*) $$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C (u+iv)(dx+i\,dy) = \oint_C u\,dx - v\,dy + i\oint_C v\,dx + u\,dy$$

Per il teorema di Green,

$$\oint_C u\,dx - v\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy, \qquad \oint_C v\,dx + u\,dy = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

dove $\mathcal{R}$ è la regione delimitata da C.

Dato che $f(z)$ è analitica, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ (problema 12), e quindi gli integrali sopraindicati sono eguali a zero. Allora $\oint_C f(z)\,dz = 0$. In questo procedimento si è fatta l'ipotesi che $f'(z)$ e le derivate parziali siano continue, ma questa restrizione può essere eliminata.

(*b*) Si considerino due percorsi qualsiasi che congiungano i punti P_1 e P_2 (v. fig. 5-10). Per il teorema di Cauchy,

$$\int_{P_1AP_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

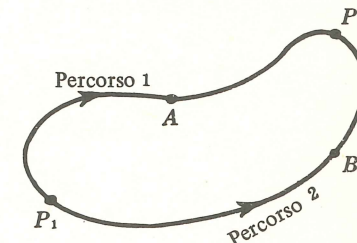
Allora

$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz + \int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{P_1AP_2} f(z)\,dz = -\int_{P_2BP_1} f(z)\,dz = \int_{P_1BP_2} f(z)\,dz$$

Fig. 5-10

cioè l'integrale lungo P_1AP_2 (percorso 1) = integrale lungo P_1BP_2 (percorso 2) e quindi l'integrale è indipendente dal percorso che unisce P_1 a P_2.

Ciò spiega i risultati ottenuti nel problema 18 dato che $f(z) = z^2$ è analitica.

20. Se $f(z)$ è analitica all'interno e sul contorno di una regione delimitata da due linee chiuse C_1 e C_2 (v. fig. 5-11), dimostrare che

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Fig. 5-11

Come indicato in fig. 5-11, tracciare il segmento AB (detto *taglio trasversale*) che unisce un punto qualsiasi di C_2 a un punto qualsiasi di C_1. Per il teorema di Cauchy (problema 19),

$$\int_{AQPABRSTBA} f(z)\,dz = 0$$

dato che $f(z)$ è analitica nella regione ombreggiata e sul suo contorno. Allora

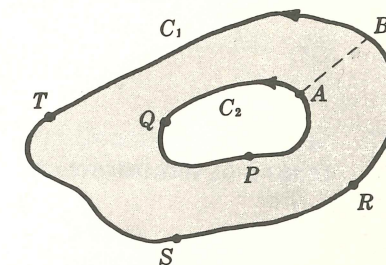
$$\int_{AQPA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{BRSTB} f(z)\,dz + \int_{BA} f(z)\,dz = 0 \qquad (1)$$

Ma $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz$. Quindi la (*1*) dà

$$\int_{AQPA} f(z)\,dz = -\int_{BRSTB} f(z)\,dz = \int_{BTSRB} f(z)\,dz$$

cioè

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$$

Si noti che non occorre che $f(z)$ sia analitica all'*interno* della linea C_2.

21. (*a*) Dimostrare che $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{se } n=1 \\ 0 & \text{se } n=2,3,4,\ldots \end{cases}$ dove C è una linea semplice chiusa che delimita una regione che ha $z=a$ come punto interno.

(*b*) Qual è il valore dell'integrale se $n = 0, -1, -2, -3, \ldots$?

(*a*) Sia C_1 un cerchio di raggio ϵ con centro in $z = a$ (v. fig. 5-12). Dato che $(z-a)^{-n}$ è analitica all'interno e sul contorno della regione delimitata da C e da C_1, per il problema 20 si ha

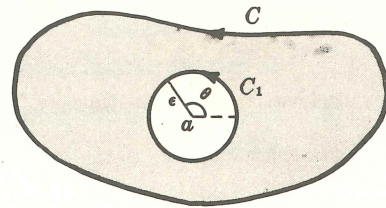
$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, si noti che su C_1, $|z-a| = \epsilon$ o $z-a = \epsilon e^{i\theta}$ e $dz = i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$. L'integrale vale allora

Fig. 5-12

$$\int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta}{\epsilon^n e^{in\theta}} = \frac{i}{\epsilon^{n-1}}\int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta}\,d\theta = \frac{i}{\epsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i}\bigg|_0^{2\pi} = 0 \quad \text{se } n \neq 1$$

Se $n = 1$, l'integrale vale $i\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$.

(*b*) Per $n = 0, -1, -2, \ldots$ l'integrando è $1, (z-a), (z-a)^2, \ldots$ ed è analitico ovunque all'interno di C_1, compreso il punto $z = a$. Quindi per il teorema di Cauchy l'integrale è nullo.

22. Calcolare $\oint_C \frac{dz}{z-3}$ dove C è (*a*) il cerchio $|z| = 1$, (*b*) il cerchio $|z+i| = 4$.

(*a*) Dato che $z = 3$ non è interno a $|z| = 1$, l'integrale vale zero (problema 19).

(*b*) Dato che $z = 3$ è interno a $|z+i| = 4$, l'integrale è eguale a $2\pi i$ (problema 21).

23. Se $f(z)$ è analitica all'interno e su una linea semplice chiusa C ed a è un punto qualsiasi interno a C, dimostrare che

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Riferendosi al problema 20 e alla figura del problema 21, si ha

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

Ponendo $z - a = \epsilon e^{i\theta}$, l'ultimo integrale diventa $i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta$. Ma, dato che $f(z)$ è analitica, essa è continua. Perciò

$$\lim_{\epsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} f(a+\epsilon e^{i\theta})\,d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)\,d\theta = 2\pi i\, f(a)$$

Da cui segue il risultato cercato.

24. Calcolare (*a*) $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz$, (*b*) $\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz$ dove C è il cerchio $|z-1| = 3$.

(*a*) Dato che $z = \pi$ è interno a C, $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = \cos\pi = -1$ per il problema 23 con $f(z) = \cos z$, $a = \pi$. Allora $\oint_C \frac{\cos z}{z-\pi}\,dz = -2\pi i$.

(*b*)

$$\oint_C \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = \oint_C e^z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \oint_C \frac{e^z}{z}\,dz - \oint_C \frac{e^z}{z+1}\,dz$$
$$= 2\pi i e^0 - 2\pi i e^{-1} = 2\pi i(1 - e^{-1})$$

per il problema 23, dato che $z = 0$ e $z = -1$ sono entrambi interni a C.

25. Calcolare $\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz$ dove C è una linea semplice chiusa qualsiasi che racchiude $z = 1$.

Procedimento 1. Per la formula integrale di Cauchy, $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.

Se $n = 2$ e $f(z) = 5z^2 - 3z + 2$, allora $f''(1) = 10$. Per cui

$$10 = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz \quad \text{o} \quad \oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = 10\pi i$$

Procedimento 2. $5z^2 - 3z + 2 = 5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4$. Allora

$$\oint_C \frac{5z^2-3z+2}{(z-1)^3}\,dz = \oint_C \frac{5(z-1)^2 + 7(z-1) + 4}{(z-1)^3}\,dz$$
$$= 5\oint_C \frac{dz}{z-1} + 7\oint_C \frac{dz}{(z-1)^2} + 4\oint_C \frac{dz}{(z-1)^3} = 5(2\pi i) + 7(0) + 4(0)$$
$$= 10\pi i$$

in base al problema 21.

SERIE E SINGOLARITA'

26. Per quali valori di z convergono le serie date?

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$. Il termine n-esimo $= u_n = \frac{z^n}{n^2 2^n}$. Allora

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2 2^{n+1}} \cdot \frac{n^2 2^n}{z^n}\right| = \frac{|z|}{2}$$

Per il criterio del rapporto, la serie converge se $|z| < 2$ e diverge se $|z| > 2$. Se $|z| = 2$ il criterio del rapporto non dà alcuna risposta.

Tuttavia, la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z^n}{n^2 2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2 2^n}$ converge se $|z| = 2$, dato che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Quindi la serie converge (assolutamente) per $|z| \leq 2$, cioè in tutti i punti interni e sul cerchio $|z| = 2$.

(*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$. Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{-z^2}{2n(2n+1)}\right| = 0$$

Allora la serie, che rappresenta $\sin z$, converge per qualsiasi valore di z.

(*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{3^n}$. Si ha $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-i)^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(z-i)^n}\right| = \frac{|z-i|}{3}$.

La serie converge se $|z-i| < 3$. e diverge se $|z-i| > 3$.

Se $|z-i| = 3$, allora $z - i = 3e^{i\theta}$ e la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta}$ Questa serie diverge, dato che il termine n-esimo non tende a zero quando $n \to \infty$.

Quindi la serie converge all'interno del cerchio $|z-i| = 3$ ma non sul contorno.

27. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è assolutamente convergente per $|z| \leqq \mathcal{R}$, dimostrare che essa è anche uniformemente convergente per detti valori di z.

Le definizioni, i teoremi e le dimostrazioni relativi alle serie di numeri complessi sono analoghi a quelli per le serie di numeri reali.

In particolare si dice che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ è *assolutamente convergente* nella regione $\mathcal{R}$ se $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ converge in $\mathcal{R}$. Si può anche dimostrare che se $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n(z)|$ converge in $\mathcal{R}$, allora converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$, cioè una serie assolutamente convergente è convergente.

Inoltre, si dice che una serie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ convergente in $\mathcal{R}$ alla funzione somma $S(z)$ è *uniformemente convergente* in $\mathcal{R}$ se per qualsiasi $\epsilon > 0$ è possibile determinare N in modo che sia

$$|S_n(z) - S(z)| < \epsilon \qquad \text{per tutti gli } n > N$$

dove N dipende solo da ϵ e non dal particolare valore di z in $\mathcal{R}$, e dove

$$S_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + \cdots + u_n(z)$$

Un importante criterio di convergenza uniforme è il seguente. Se per ogni z di $\mathcal{R}$ si possono determinare delle costanti M_n tali per cui

$$|u_n(z)| \leqq M_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} M_n \text{ converge}$$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente in $\mathcal{R}$. Tale criterio è detto *criterio M di Weierstrass*.

Per il problema particolare in esame si ha

$$|a_n z^n| \leqq |a_n| R^n = M_n \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dato che per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge, ne segue per il criterio M di Weierstrass che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge uniformemente per $|z| \leqq R$.

28. Localizzare nel piano tutte le singolarità delle seguenti funzioni, se ve ne sono, e dire a quale categoria di singolarità appartengono.

(*a*) $\dfrac{z^2}{(z+1)^3}$. $z = -1$ è un polo di ordine 3.

(*b*) $\dfrac{2z^3 - z + 1}{(z-4)^2(z-i)(z-1+2i)}$. $z = 4$ è un polo di ordine 2 (polo doppio); $z = i$ e $z = 1 - 2i$ sono poli di ordine 1 (poli semplici).

(*c*) $\dfrac{\sin mz}{z^2 + 2z + 2}$, $m \neq 0$. Dato che $z^2 + 2z + 2 = 0$ dove $z = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$, si può scrivere $z^2 + 2z + 2 = \{z - (-1+i)\}\{z - (-1-i)\} = (z+1-i)(z+1+i)$.

La funzione ammette due poli semplici: $z = -1 + i$ e $z = -1 - i$.

(*d*) $\dfrac{1 - \cos z}{z}$. $z = 0$ sembra sia una singolarità. Tuttavia, dato che $\lim_{z \to 0} \dfrac{1 - \cos z}{z} = 0$, si tratta di una singolarità eliminabile.

Un altro procedimento.

Dato che $\dfrac{1 - \cos z}{z} = \dfrac{1}{z}\left\{1 - \left(1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right\} = \dfrac{z}{2!} - \dfrac{z^3}{4!} + \cdots$, si vede che $z = 0$ è una singolarità eliminabile.

(*e*) $e^{-1/(z-1)^2} = 1 - \dfrac{1}{(z-1)^2} + \dfrac{1}{2!\,(z-1)^4} - \cdots$.

Questa è una serie di Laurent la cui parte principale ha un numero infinito di membri diversi da zero. Quindi $z = 1$ è una *singolarità essenziale.*

(*f*) e^z.

Questa funzione non presenta alcuna singolarità al finito. Tuttavia ponendo $z = 1/u$, si ha $e^{1/u}$ che ha una singolarità essenziale in $u = 0$. Si conclude che $z = \infty$ è una singolarità essenziale per e^z.

In generale, per determinare la natura di una possibile singolarità di $f(z)$ in $z = \infty$, si pone $z = 1/u$ e quindi si esamina il comportamento della funzione così ottenuta in $u = 0$.

29. Se $f(z)$ è analitica in tutti i punti interni e sul cerchio di raggio R e centro in a, e se $a + h$ è un qualsiasi punto interno al cerchio C, dimostrare il *teorema di Taylor*, cioè che

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \cdots$$

Per la formula integrale di Cauchy (problema 23), si ha

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)\,dz}{z - a - h} \tag{1}$$

Dividendo,

$$\frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{(z-a)[1 - h/(z-a)]}$$

$$= \frac{1}{(z-a)}\left\{1 + \frac{h}{(z-a)} + \frac{h^2}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{(z-a)^n} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)}\right\} \tag{2}$$

Sostituendo la (*2*) nella (*1*) e usando le formule integrali di Cauchy, si ha

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + R_n$$

$$= f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + R_n$$

dove

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

Ora quando z si trova su C, $\left|\dfrac{f(z)}{z-a-h}\right| \leqq M$ e $|z-a| = R$, per cui per la (*14*), pag. 140, si ha, dato che $2\pi R$ è la lunghezza di C,

$$|R_n| \leqq \frac{|h|^{n+1} M}{2\pi R^{n+1}} \cdot 2\pi R$$

Quando $n \to \infty$, $|R_n| \to 0$. Allora $R_n \to 0$ e ne segue il risultato cercato.

Se $f(z)$ è analitica in una regione anulare $r_1 \leqq |z-a| \leqq r_2$, si può generalizzare la serie di Taylor in una serie di Laurent (v. problema 119). In alcuni casi, come mostrato nel problema 30, la serie di Laurent può essere ottenuta usando una serie di Taylor nota.

30. Determinare la serie di Laurent attorno alle singolarità indicate per ognuna delle seguenti funzioni. Classificare in ogni caso le singolarità e dare la regione di convergenza di ogni serie.

(*a*) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$; $z = 1$. Sia $z-1 = u$. Allora $z = 1+u$ e

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e^{1+u}}{u^2} = e\cdot\frac{e^u}{u^2} = \frac{e}{u^2}\left\{1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \frac{e(z-1)^2}{4!} + \cdots$$

$z = 1$ è un *polo di ordine 2*, o *polo doppio*.

La serie converge per tutti i valori di $z \neq 1$.

(*b*) $z\cos\frac{1}{z}$; $z = 0$.

$$z\cos\frac{1}{z} = z\left(1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} - \frac{1}{6!\,z^6} + \cdots\right) = z - \frac{1}{2!\,z} + \frac{1}{4!\,z^3} - \frac{1}{6!\,z^5} + \cdots$$

$z = 0$ è una *singolarità essenziale.*

La serie converge per tutti i valori di $z \neq 0$.

(*c*) $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$; $z = \pi$. Sia $z-\pi = u$. Allora $z = u+\pi$ e

$$\frac{\sin z}{z-\pi} = \frac{\sin(u+\pi)}{u} = -\frac{\sin u}{u} = -\frac{1}{u}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= -1 + \frac{u^2}{3!} - \frac{u^4}{5!} + \cdots = -1 + \frac{(z-\pi)^2}{3!} - \frac{(z-\pi)^4}{5!} + \cdots$$

$z = \pi$ è una *singolarità eliminabile.*

La serie converge per tutti i valori di z.

(*d*) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -1$. Sia $z+1 = u$. Allora

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{u-1}{u(u+1)} = \frac{u-1}{u}(1-u+u^2-u^3+u^4-\cdots)$$

$$= -\frac{1}{u} + 2 - 2u + 2u^2 - 2u^3 + \cdots$$

$$= -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \cdots$$

$z = -1$ è un *polo di ordine 1*, o *polo semplice.*

La serie converge per tutti i valori di z per cui $0 < |z+1| < 1$.

(*e*) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z = 0, -2$.

Caso 1, $z = 0$. Usando il teorema binomiale,

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8z(1+z/2)^3} = \frac{1}{8z}\left\{1 + (-3)\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{(-3)(-4)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}\left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{8z} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16}z - \frac{5}{32}z^2 + \cdots$$

$z = 0$ è un *polo di ordine 1* o *polo semplice.*

La serie converge per $0 < |z| < 2$.

Caso 2, $z = -2$. Sia $z+2 = u$. Allora

$$\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{(u-2)u^3} = \frac{1}{-2u^3(1-u/2)} = -\frac{1}{2u^3}\left\{1 + \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + \left(\frac{u}{2}\right)^3 + \left(\frac{u}{2}\right)^4 + \cdots\right\}$$

$$= -\frac{1}{2u^3} - \frac{1}{4u^2} - \frac{1}{8u} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}u - \cdots$$

$$= -\frac{1}{2(z+2)^3} - \frac{1}{4(z+2)^2} - \frac{1}{8(z+2)} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32}(z+2) - \cdots$$

$z = -2$ è un *polo di ordine 3.*

La serie converge per $0 < |z+2| < 2$.

RESIDUI E TEOREMA DEI RESIDUI

31. Se $f(z)$ è analitica ovunque all'interno e su una linea semplice chiusa C eccezion fatta per $z = a$ che è un polo di ordine n per cui

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

dove $a_{-n} \neq 0$, dimostrare che

(*a*) $\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$

(*b*) $a_{-1} = \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{(n-1)!}\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$.

(*a*) Integrando e usando il problema 21 si ha

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_C \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}dz + \cdots + \oint_C \frac{a_{-1}}{z-a}dz + \oint_C \{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots\}\,dz$$

$$= 2\pi i\, a_{-1}$$

Dato che resta solo il termine dove figura a_{-1}, si dice che a_{-1} è il *residuo* di $f(z)$ nel polo $z = a$.

(*b*) Moltiplicando per $(z-a)^n$ si ottiene la serie di Taylor

$$(z-a)^n f(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \cdots$$

Prendendo la derivata $(n-1)$-esima di entrambi i membri e ponendo $z \to a$, si ha

$$(n-1)!\,a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\}$$

da cui il risultato voluto.

32. Determinare i residui delle funzioni date nei poli indicati.

(*a*) $\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$; $z = 2, i, -i$. Questi sono poli semplici. Allora:

Il residuo in $z = 2$ è $\lim\limits_{z\to 2}(z-2)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\right\} = \dfrac{4}{5}$.

Il residuo in $z = i$ è $\lim\limits_{z\to i}(z-i)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \dfrac{i^2}{(i-2)(2i)} = \dfrac{1-2i}{10}$.

Il residuo in $z = -i$ è $\lim\limits_{z\to -i}(z+i)\left\{\dfrac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\right\} = \dfrac{i^2}{(-i-2)(-2i)} = \dfrac{1+2i}{10}$.

(*b*) $\dfrac{1}{z(z+2)^3}$; $z = 0, -2$. $\quad z = 0$ è un polo semplice, $z = -2$ è un polo di ordine 3. Allora:

Il residuo in $z = 0$ è $\quad \lim\limits_{z \to 0} z \cdot \dfrac{1}{z(z+2)^3} \;=\; \dfrac{1}{8}$

Il residuo in $z = -2$ è $\quad \lim\limits_{z \to -2} \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2}{dz^2}\left\{(z+2)^3 \cdot \dfrac{1}{z(z+2)^3}\right\}$

$$= \lim_{z \to -2} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; \lim_{z \to -2} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{z^3}\right) \;=\; -\frac{1}{8}$$

Si noti che questi residui possono essere determinati dai coefficienti di $1/z$ e $1/(z+2)$ nelle corrispondenti serie di Laurent [v. problema 30(*e*)].

(*c*) $\dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}$; $z = 3$ $\quad$ è un polo di ordine 2 o polo doppio. Allora:

Il residuo è $\quad \lim\limits_{z \to 3} \dfrac{d}{dz}\left\{(z-3)^2 \cdot \dfrac{ze^{zt}}{(z-3)^2}\right\} \;=\; \lim\limits_{z \to 3} \dfrac{d}{dz}(ze^{zt}) \;=\; \lim\limits_{z \to 3} (e^{zt} + zte^{zt})$

$$= e^{3t} + 3te^{3t}$$

(*d*) $\cot z$; $z = 5\pi$ $\quad$ è un polo di ordine 1. Allora:

Il residuo è $\quad \lim\limits_{z \to 5\pi} (z - 5\pi) \cdot \dfrac{\cos z}{\sin z} \;=\; \left(\lim\limits_{z \to 5\pi} \dfrac{z - 5\pi}{\sin z}\right)\left(\lim\limits_{z \to 5\pi} \cos z\right) \;=\; \left(\lim\limits_{z \to 5\pi} \dfrac{1}{\cos z}\right)(-1)$

$$= (-1)(-1) \;=\; 1$$

dove si è usata la regola di L'Hospital, la cui applicabilità alle funzioni di variabile complessa può essere dimostrata.

33. Se $f(z)$ è analitica all'interno e su una linea semplice chiusa C eccezion fatta per un numero finito di poli $a, b, c, \ldots$ interni a C, dimostrare che

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \text{ (somma dei residui di } f(z) \text{ nei poli } a, b, c, \text{ ecc.)}$$

Fare riferimento alla fig. 5-13.

Ragionando come nel problema 20 (cioè tracciando dei tagli trasversali tra C e C_1, C_2, C_3, ecc.), si ha

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \cdots$$

Fig. 5-13

Per il polo a,

$$f(z) \;=\; \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

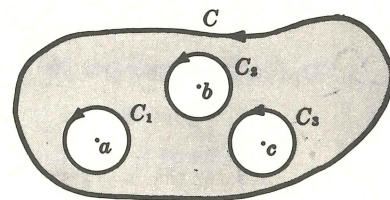
per cui, come nel problema 31, $\oint_{C_1} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, a_{-1}$.

Analogamente, per il polo b, $\quad f(z) \;=\; \dfrac{b_{-n}}{(z-b)^n} + \cdots + \dfrac{b_{-1}}{(z-b)} + b_0 + b_1(z-b) + \cdots$

per cui

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\, b_{-1}$$

Proseguendo in questo modo, si vede che

$$\oint_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + \cdots) \;=\; 2\pi i \text{ (somma dei residui)}$$

34. Calcolare $\displaystyle\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-1)(z+3)^2}$ dove C è data da (*a*) $|z| = 3/2$, (*b*) $|z| = 10$.

Il residuo nel polo semplice $z = 1$ è $\quad \lim\limits_{z \to 1} \left\{(z-1)\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} \;=\; \dfrac{e}{16}$

Il residuo nel polo doppio $z = -3$ è

$$\lim_{z \to -3} \frac{d}{dz}\left\{(z+3)^2 \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\right\} \;=\; \lim_{z \to -3} \frac{(z-1)e^z - e^z}{(z-1)^2} \;=\; \frac{-5e^{-3}}{16}$$

(*a*) Dato che $|z| = 3/2$ racchiude solo il polo $z = 1$,

$$\text{l'integrale richiesto è} \;=\; 2\pi i\left(\frac{e}{16}\right) \;=\; \frac{\pi i e}{8}$$

(*b*) Dato che $|z| = 10$ racchiude ambedue i poli $z = 1$ e $z = -3$,

$$\text{l'integrale richiesto è} \;=\; 2\pi i\left(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\right) \;=\; \frac{\pi i(e - 5e^{-3})}{8}$$

CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI

35. Se $|f(z)| \leqq \dfrac{M}{R^k}$ per $z = Re^{i\theta}$, dove $k > 1$ e M sono costanti, dimostrare che $\lim\limits_{R \to \infty} \displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz \;=\; 0$ dove Γ è il semicerchio di raggio R indicato in fig. 5-14.

Fig. 5-14

Per la formula (*14*), pag. 140, si ha

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \;\leqq\; \int_\Gamma |f(z)|\,|dz| \;\leqq\; \frac{M}{R^k}\cdot \pi R \;=\; \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

dato che la lunghezza dell'arco è $L = \pi R$. Allora

$$\lim_{R \to \infty}\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \;=\; 0 \quad \text{e quindi} \quad \lim_{R \to \infty} \int_\Gamma f(z)\,dz \;=\; 0$$

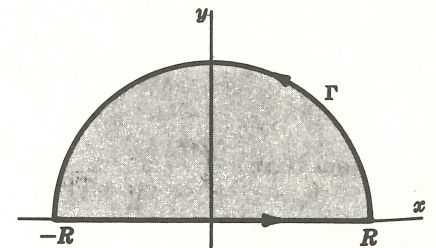
36. Dimostrare che per $z = Re^{i\theta}$, $\;|f(z)| \leqq \dfrac{M}{R^k}$, $k > 1$ se $f(z) \;=\; \dfrac{1}{1+z^4}$.

Se $z = Re^{i\theta}$, $\quad |f(z)| \;=\; \left|\dfrac{1}{1+R^4e^{4i\theta}}\right| \;\leqq\; \dfrac{1}{|R^4e^{4i\theta}| - 1} \;=\; \dfrac{1}{R^4 - 1} \;\leqq\; \dfrac{2}{R^4}$ se R è abbastanza grande (ad es. $R > 2$) perché $M = 2$, $k = 4$.

Si noti che si è fatto uso della diseguaglianza $|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ con $z_1 = R^4 e^{4i\theta}$ e $z_2 = 1$.

37. Calcolare $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$.

Si consideri $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^4+1}$, dove C è il contorno chiuso del problema 35 costituito dal segmento di retta tra $-R$ e $+R$ e dal semicerchio Γ, percorso in senso positivo (antiorario).

Dato che $z^4 + 1 = 0$ quando $z = e^{\pi i/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$, questi sono poli semplici di $1/(z^4+1)$. Solo i poli $e^{\pi i/4}$ e $e^{3\pi i/4}$ sono interni a C. Allora usando la regola di L'Hospital,

$$\text{Il residuo in } e^{\pi i/4} = \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \left\{ (z - e^{\pi i/4}) \frac{1}{z^4+1} \right\}$$

$$= \lim_{z \to e^{\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4}$$

$$\text{Il residuo in } e^{3\pi i/4} = \lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \left\{ (z - e^{3\pi i/4}) \frac{1}{z^4+1} \right\}$$

$$= \lim_{z \to e^{3\pi i/4}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4}$$

Quindi
$$\oint_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \{ \tfrac{1}{4} e^{-3\pi i/4} + \tfrac{1}{4} e^{-9\pi i/4} \} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

cioè
$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} + \int_\Gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

Prendendo in entrambi i membri della (2) il limite per $R \to \infty$ e sfruttando i risultati del problema 36, si ha

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Dato che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$, l'integrale richiesto vale $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

38. Dimostrare che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} = \frac{7\pi}{50}$.

I poli di $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)}$ racchiusi nel contorno C del problema 35 sono $z = i$ di ordine 2 e $z = -1+i$ di ordine 1.

Il residuo in $z = i$ è $\displaystyle\lim_{z \to i} \frac{d}{dz} \left\{ (z-i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2(z-i)^2(z^2+2z+2)} \right\} = \frac{9i-12}{100}$.

Il residuo in $z = -1+i$ è $\displaystyle\lim_{z \to -1+i} (z+1-i) \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z+1-i)(z+1+i)} = \frac{3-4i}{25}$.

Allora
$$\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = 2\pi i \left\{ \frac{9i-12}{100} + \frac{3-4i}{25} \right\} = \frac{7\pi}{50}$$

o
$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2(x^2+2x+2)} + \int_\Gamma \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)^2(z^2+2z+2)} = \frac{7\pi}{50}$$

Prendendo il limite per $R \to \infty$ e notando che il secondo integrale per il problema 35 tende a zero, si ottiene il risultato desiderato.

39. Calcolare $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$.

Sia $z = e^{i\theta}$. Allora $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$, $dz = ie^{i\theta}\,d\theta = iz\,d\theta$ per cui

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5+3\left(\dfrac{z-z^{-1}}{2i}\right)} = \oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3}$$

dove C è il cerchio di raggio unitario con centro nell'origine, riportato nella fig. 5-15.

I poli di $\dfrac{2}{3z^2+10iz-3}$ sono i poli semplici

$$z = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6} = -3i,\ -i/3.$$

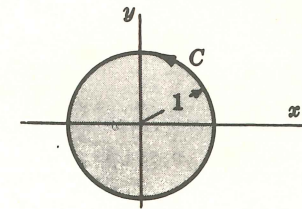



Fig. 5-15

Solo $-i/3$ è interno a C.

Residuo in $-i/3$ $= \displaystyle\lim_{z \to -i/3} \left(z + \frac{i}{3}\right)\left(\frac{2}{3z^2+10iz-3}\right) = \lim_{z \to -i/3} \frac{2}{6z+10i} = \frac{1}{4i}$ per la regola di L'Hospital.

Allora $\displaystyle\oint_C \frac{2\,dz}{3z^2+10iz-3} = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}\right) = \frac{\pi}{2}$, il valore richiesto.

40. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{12}$.

Se $z = e^{i\theta}$, $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\cos 3\theta = \dfrac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2} = \dfrac{z^3+z^{-3}}{2}$, $dz = iz\,d\theta$.

Allora
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \oint_C \frac{(z^3+z^{-3})/2}{5-4\left(\dfrac{z+z^{-1}}{2}\right)} \frac{dz}{iz} = -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz$$

dove C è il contorno del problema 39.

L'integrando ha un polo di ordine 3 in $z = 0$ e un polo semplice in $z = \frac{1}{2}$ interni a C.

Il residuo in $z = 0$ è $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left\{ z^3 \cdot \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right\} = \frac{21}{8}$.

Il residuo in $z = \frac{1}{2}$ è $\displaystyle\lim_{z \to 1/2} \left\{ (z - \tfrac{1}{2}) \cdot \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)} \right\} = -\frac{65}{24}$.

Allora $\displaystyle -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{z^6+1}{z^3(2z-1)(z-2)}\,dz = -\frac{1}{2i}(2\pi i)\left\{\frac{21}{8} - \frac{65}{24}\right\} = \frac{\pi}{12}$ come volevasi.

41. Se $|f(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ per $z = Re^{i\theta}$, dove $k > 0$ e M sono costanti, dimostrare che

$$\lim_{R \to \infty} \int_\Gamma e^{imz} f(z)\,dz = 0$$

dove Γ è il semicerchio del contorno del problema 35 e m è una costante positiva.

Se $z = Re^{i\theta}$, $\displaystyle\int_\Gamma e^{imz} f(z)\,dz = \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta$.

$$\text{Allora } \left| \int_0^\pi e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\,d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| e^{imRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} \right| d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left| e^{imR\cos\theta - mR\sin\theta} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta} \right| d\theta$$

$$= \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta} |f(Re^{i\theta})|\, R\,d\theta$$

$$\leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}\,d\theta = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta$$

Ora $\sin\theta \geqq 2\theta/\pi$ per $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ (v. problema 3, cap. 7). Allora l'ultimo integrale è minore od eguale a

$$\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2mR\theta/\pi}\,d\theta \quad = \quad \frac{\pi M}{mR^k}(1-e^{-mR})$$

Quando $R\to\infty$ esso tende a zero, dato che m e k sono positivi e il risultato cercato è dimostrato.

42. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}e^{-m}, \quad m>0.$

Si consideri $\displaystyle\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz$ dove C è il contorno del problema 35.

L'integrando presenta poli semplici in $z=\pm i$, ma solo $z=i$ si trova all'interno di C.

Il residuo in $z=i$ è $\quad \displaystyle\lim_{z\to i}\left\{(z-i)\frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}\right\} \;=\; \frac{e^{-m}}{2i}.$

Allora

$$\oint_C \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \;=\; 2\pi i\left(\frac{e^{-m}}{2i}\right) \;=\; \pi e^{-m}$$

o

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{imx}}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \;=\; \pi e^{-m}$$

cioè

$$\int_{-R}^{R}\frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + i\int_{-R}^{R}\frac{\sin mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \;=\; \pi e^{-m}$$

e così

$$2\int_0^R \frac{\cos mx}{x^2+1}\,dx + \int_\Gamma \frac{e^{imz}}{z^2+1}\,dz \;=\; \pi e^{-m}$$

Prendendo il limite per $R\to\infty$ e usando il problema 41 per dimostrare che l'integrale lungo Γ tende a zero, si ottiene il risultato voluto.

43. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}.$

Il metodo del problema 42 porta a considerare l'integrale di e^{iz}/z lungo il contorno del problema 35. Tuttavia dato che $z=0$ si trova su questo percorso di integrazione e dato che non si può integrare attraverso una singolarità, si modifica il percorso facendo una curva attorno a $z=0$, come indicato in fig. 5-16. Si indica il nuovo percorso $ABDEFGHJA$ con C'.

Fig. 5-16

Dato che $z=0$ è esterno a C', si ha

$$\int_{C'}\frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; 0$$

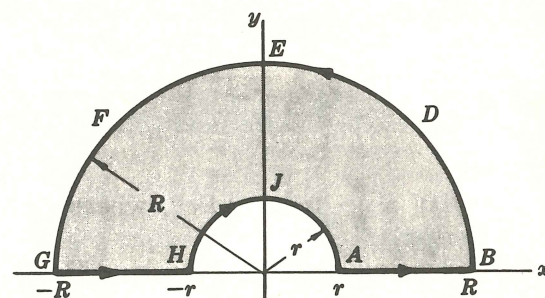
o

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{HJA}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{BDEFG}\frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; 0$$

Sostituendo $-x$ a x nel primo integrale e combinando con il terzo integrale, si ha

$$\int_r^R \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx + \int_{HJA}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{BDEFG}\frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; 0$$

o

$$2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; -\int_{HJA}\frac{e^{iz}}{z}\,dz - \int_{BDEFG}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$$

Sia $r\to 0$ e $R\to\infty$. Per il problema 41, il secondo integrale a destra tende a zero. Il primo integrale sulla destra tende a

$$-\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 \frac{e^{ire^{i\theta}}}{re^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,d\theta \;=\; -\lim_{r\to 0}\int_\pi^0 ie^{ire^{i\theta}}\,d\theta \;=\; \pi i$$

dato che si può prendere il limite sotto segno di integrale.

Allora si ha $\quad \displaystyle\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}} 2i\int_r^R \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \pi i \quad$ o $\quad \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}$

PROBLEMI VARI

44. Sia $w=z^2$ una trasformazione dal piano z (piano xy) al piano w (piano uv). Si consideri nel piano z un triangolo con i vertici in $A(2,1)$, $B(4,1)$, $C(4,3)$. (*a*) Dimostrare che l'*immagine* del triangolo è un triangolo curvilineo nel piano uv. (*b*) Determinare gli angoli di tale triangolo curvilineo e confrontarli con quelli del triangolo di partenza.

(*a*) Dato che $w=z^2$, si ha come equazioni della trasformazione $u=x^2-y^2$, $v=2xy$. Allora il punto $A(2,1)$ del piano xy si trasforma nel punto $A'(3,4)$ del piano uv (v. fig. 5-17). Analogamente i punti B e C si trasformano nei punti B' e C' rispettivamente. I lati del triangolo ABC, AC, BC e AB si trasformano rispettivamente nei segmenti parabolici $A'C'$, $B'C'$, $A'B'$ del triangolo curvilineo $A'B'C'$ (in fig. 5-17(*a*) e (*b*) sono indicate anche le equazioni dei lati dei due triangoli).

(*a*)

(*b*)

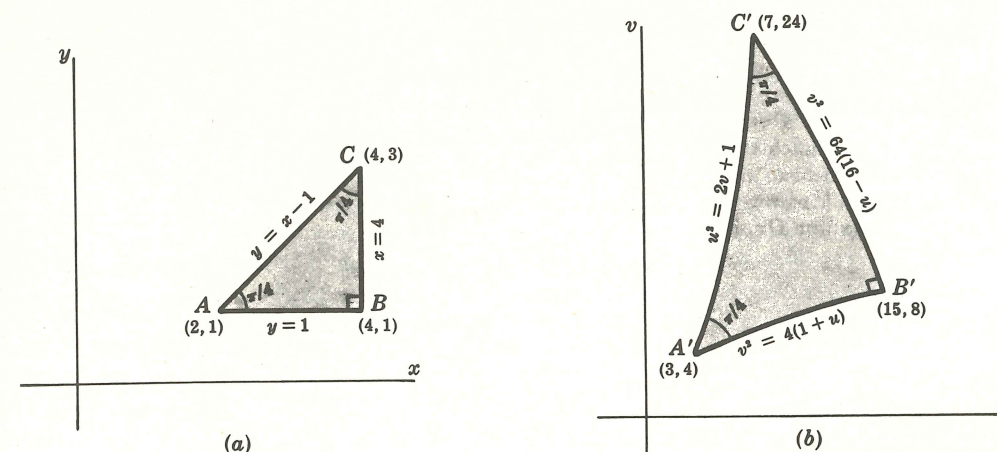



Fig. 5-17

(*b*) La inclinazione della tangente alla linea $v^2=4(1+u)$ in $(3,4)$ è $\displaystyle m_1 = \left.\frac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = \left.\frac{2}{v}\right|_{(3,4)} = \frac{1}{2}.$

La inclinazione della tangente alla curva $u^2=2v+1$ in $(3,4)$ è $\displaystyle m_2 = \left.\frac{dv}{du}\right|_{(3,4)} = u = 3.$

Allora l'angolo θ formato dalle due curve in A' è dato da

$$\tan\theta \;=\; \frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2} \;=\; \frac{3-\frac{1}{2}}{1+(3)(\frac{1}{2})} \;=\; 1, \quad \text{e} \quad \theta=\pi/4$$

Analogamente si può dimostrare che l'angolo formato da $A'C'$ e $B'C'$ è $\pi/4$, mentre l'angolo tra $A'B'$ e $B'C'$ è $\pi/2$. Perciò gli angoli del triangolo curvilineo sono eguali ai corrispondenti angoli del triangolo di partenza. In generale, se $w=f(z)$ è una trasformazione in cui $f(z)$ è analitica, l'angolo formato da due linee del piano z che si intersecano in z_0 è eguale per ampiezza e orientamento all'angolo formato dalle due immagini delle linee, a condizione che $f'(z_0)\neq 0$. Tale proprietà è detta proprietà conforme delle funzioni analitiche e per tale ragione la trasformazione $w=f(z)$ è detta anche *funzione di trasformazione* o *rappresentazione conforme.*

45. Si supponga che $w = \sqrt{z}$ definisca una trasformazione dal piano z al piano w. Un punto si sposta in senso antiorario lungo il cerchio $|z| = 1$. Dimostrare che quando esso è ritornato per la prima volta nella sua posizione di partenza, il suo punto immagine non vi è ancora ritornato; ma che quando esso vi ritorna per la seconda volta, allora il suo punto immagine vi ritorna per la prima.

Sia $z = e^{i\theta}$. Allora $w = \sqrt{z} = e^{i\theta/2}$. Si supponga che $\theta = 0$ corrisponda alla posizione di partenza. Allora $z = 1$ e $w = 1$ [i punti corrispondenti A e P di fig. 5-18(*a*) e (*b*)].

(*a*)

(*b*)

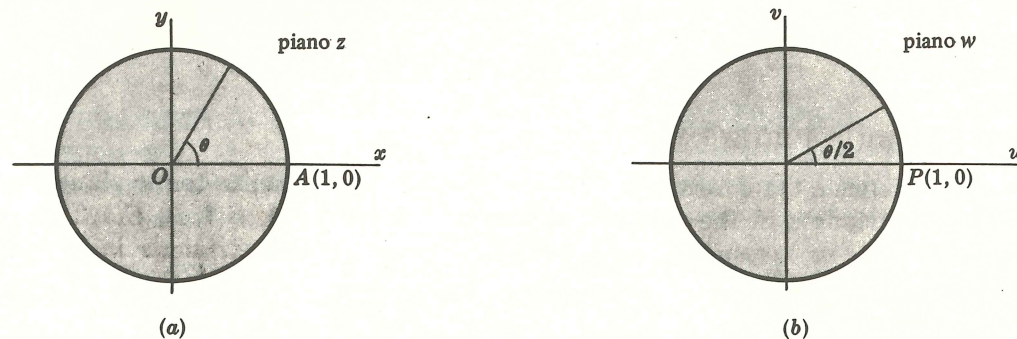



Fig. 5-18

Quando nel piano z si è fatta una rotazione completa, $\theta = 2\pi$, $z = 1$ ma $w = e^{i\theta/2} = e^{i\pi} = -1$ per cui il punto immagine non è ancora ritornato nella posizione di partenza.

Tuttavia, dopo due rotazioni complete compiute nel piano z, $\theta = 4\pi$, $z = 1$ e $w = e^{i\theta/2} = e^{2\pi i} = 1$ per cui il punto immagine è ritornato per la prima volta nella posizione di partenza.

Da quanto detto sopra segue che w non è una funzione di z ad un sol valore, ma una *funzione di z a due valori*; cioè ad un valore di z corrispondono due valori di w. Se si vuole considerarla come una funzione ad un sol valore, si deve restringere l'intervallo di θ. Si può ad es. assumere $0 \leqq \theta < 2\pi$, benché esistano altre possibilità. Questo rappresenta un ramo della funzione a due valori $w = \sqrt{z}$. Se si prosegue oltre questo intervallo, si salta sul secondo ramo, ad es. $2\pi \leqq \theta < 4\pi$. Il punto $z = 0$ attorno al quale avviene la rotazione è detto *punto di diramazione*. Analogamente, ci si può assicurare che $f(z) = \sqrt{z}$ sia ad un sol valore, vincolandosi a non attraversare la semiretta Ox, detta *retta di diramazione*.

46. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}$, $0 < p < 1$.

Si consideri $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz$. Dato che $z = 0$ è un punto di diramazione, si assume C eguale al contorno indicato in figura 5-19 dove AB e GH materialmente coincidono con l'asse delle x e sono indicati distinti solo per chiarezza.

L'integrando presenta il polo $z = -1$ situato dentro C.

Il residuo in $z = -1 = e^{\pi i}$ è

$$\lim_{z\to -1} (z+1)\frac{z^{p-1}}{1+z} = (e^{\pi i})^{p-1} = e^{(p-1)\pi i}$$

Allora $\displaystyle\oint_C \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$

o, tralasciando di scrivere l'integrando,

$$\int_{AB} + \int_{BDEFG} + \int_{GH} + \int_{HJA} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

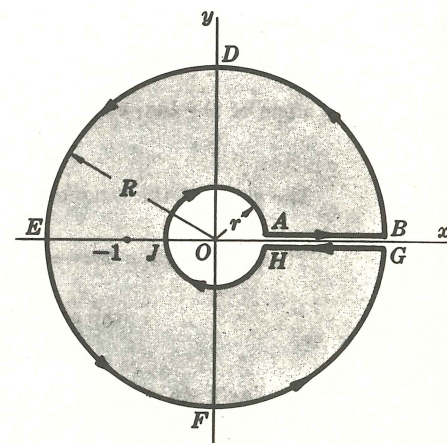



Fig. 5-19

Si ha allora

$$\int_r^R \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_0^{2\pi} \frac{(Re^{i\theta})^{p-1}\, iRe^{i\theta}\,d\theta}{1+Re^{i\theta}} + \int_R^r \frac{(xe^{2\pi i})^{p-1}}{1+xe^{2\pi i}}\,dx + \int_{2\pi}^0 \frac{(re^{i\theta})^{p-1}\, ire^{i\theta}\,d\theta}{1+re^{i\theta}} = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

dove per l'integrale lungo GH si è dovuto usare $z = xe^{2\pi i}$, dato che l'argomento di z è aumentato di 2π girando lungo il cerchio $BDEFG$.

Prendendo il limite per $r \to 0$ e $R \to \infty$ e notando che il secondo e il quarto integrale tendono a zero, si ha

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_\infty^0 \frac{e^{2\pi i(p-1)}\, x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\pi\, e^{(p-1)\pi i}$$

o

$$(1 - e^{2\pi i(p-1)})\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = 2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}$$

per cui

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{2\pi i\, e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

NUMERI COMPLESSI. FORMA POLARE

47. Eseguire le operazioni indicate:

(*a*) $2(5-3i) - 3(-2+i) + 5(i-3)$ (*c*) $\dfrac{5}{3-4i} + \dfrac{10}{4+3i}$ (*e*) $\left|\dfrac{2-4i}{5+7i}\right|^2$

(*b*) $(3-2i)^3$ (*d*) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$ (*f*) $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^2(1-i)}$

Risp. (*a*) $1-4i$, (*b*) $-9-46i$, (*c*) $\frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$, (*d*) -1, (*e*) $\frac{10}{37}$, (*f*) $\frac{16}{5} - \frac{2}{5}i$

48. Dati z_1 e z_2 numeri complessi, dimostrare che (*a*) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, (*b*) $|z_1^2| = |z_1|^2$ enunciando tutte le restrizioni del caso.

49. Dimostrare che (*a*) $|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$, (*b*) $|z_1 + z_2 + z_3| \leqq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, (*c*) $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$.

50. Determinare tutte le soluzioni di $2z^4 - 3z^3 - 7z^2 - 8z + 6 = 0$. *Risp.* $3, \frac{1}{2}, -1 \pm i$

51. Siano z_1 e z_2 rappresentati nel diagramma di Argand dai punti P_1 e P_2. Tracciare i segmenti OP_1 e OP_2, dove O è l'origine. Dimostrare che $z_1 + z_2$ può essere rappresentata dal punto P_3, dove OP_3 è la diagonale del parallelogramma di lati OP_1 e OP_2. Questa è detta *legge del parallelogramma* della somma dei numeri complessi. A causa di questa ed altre proprietà, i numeri complessi possono anche essere considerati come dei *vettori* a due dimensioni.

52. Interpretare geometricamente le diseguaglianze del problema 49.

53. Esprimere in forma polare (*a*) $3\sqrt{3} + 3i$, (*b*) $-2-2i$, (*c*) $1 - \sqrt{3}\,i$, (*d*) 5, (*e*) $-5i$.

Risp. (*a*) $6 \operatorname{cis} \pi/6$, (*b*) $2\sqrt{2} \operatorname{cis} 5\pi/4$, (*c*) $2 \operatorname{cis} 5\pi/3$, (*d*) $5 \operatorname{cis} 0$, (*e*) $5 \operatorname{cis} 3\pi/2$

54. Calcolare (*a*) $[2(\cos 25° + i \sin 25°)][5(\cos 110° + i \sin 110°)]$, (*b*) $\dfrac{12 \operatorname{cis} 16°}{(3 \operatorname{cis} 44°)(2 \operatorname{cis} 62°)}$.

Risp. (*a*) $-5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}\,i$, (*b*) $-2i$

55. Determinare tutte le radici indicate e rappresentarle graficamente:
(a) $(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\,i)^{1/3}$, (b) $(-1)^{1/5}$, (c) $(\sqrt{3} - i)^{1/3}$, (d) $i^{1/4}$.

Risp. (a) $2 \text{ cis } 15°$, $2 \text{ cis } 135°$, $2 \text{ cis } 255°$

(b) $\text{cis } 36°$, $\text{cis } 108°$, $\text{cis } 180° = -1$, $\text{cis } 252°$, $\text{cis } 324°$

(c) $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 110°$, $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 230°$, $\sqrt[3]{2} \text{ cis } 350°$

(d) $\text{cis } 22{,}5°$, $\text{cis } 112{,}5°$, $\text{cis } 202{,}5°$, $\text{cis } 292{,}5°$

56. Dati $z_1 = r_1 \text{ cis } \theta_1$ e $z_2 = r_2 \text{ cis } \theta_2$, dimostrare che (a) $z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{ cis } (\theta_1 + \theta_2)$, (b) $z_1/z_2 = (r_1/r_2)$ $\text{cis } (\theta_1 - \theta_2)$. Darne l'interpretazione geometrica.

FUNZIONI, LIMITI, CONTINUITA'

57. Descrivere il luogo rappresentato da (a) $|z + 2 - 3i| = 5$, (b) $|z + 2| = 2|z - 1|$, (c) $|z + 5| - |z - 5| = 6$. Costruire per ogni caso il grafico.

Risp. (a) Cerchio $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, centro $(-2, 3)$, raggio 5.

(b) Cerchio $(x - 2)^2 + y^2 = 4$, centro $(2, 0)$, raggio 2.

(c) Ramo di iperbole $x^2/9 - y^2/16 = 1$, dove $x \geqq 3$.

58. Determinare la regione del piano z rappresentata da ognuna delle seguenti espressioni:
(a) $|z - 2 + i| \geqq 4$, (b) $|z| \leqq 3$, $0 \leqq \arg z \leqq \frac{\pi}{4}$, (c) $|z - 3| + |z + 3| < 10$.
Costruire per ogni caso il grafico.

Risp. (a) Contorno e zona esterna al cerchio $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$.

(b) Regione del primo quadrante limitata da $x^2 + y^2 = 9$, l'asse x e la retta $y = x$.

(c) Interno dell'ellisse $x^2/25 + y^2/16 = 1$.

59. Esprimere ognuna delle funzioni date nella forma $u(x, y) + iv(x, y)$, dove u e v sono reali.
(a) $z^3 + 2iz$, (b) $z/(3 + z)$, (c) e^{z^2}, (d) $\ln(1 + z)$.

Risp. (a) $u = x^3 - 3xy^2 - 2y$, $v = 3x^2y - y^3 + 2x$

(b) $u = \dfrac{x^2 + 3x + y^2}{x^2 + 6x + y^2 + 9}$, $v = \dfrac{3y}{x^2 + 6x + y^2 + 9}$

(c) $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$, $v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$

(d) $u = \frac{1}{2} \ln\{(1 + x)^2 + y^2\}$, $v = \tan^{-1} \dfrac{y}{1 + x} + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

60. Dimostrare che (a) $\lim\limits_{z \to z_0} z^2 = z_0^2$, (b) $f(z) = z^2$ è continua in $z = z_0$ direttamente dalla definizione.

61. (a) Se $z = \omega$ è una radice qualsiasi di $z^5 = 1$ diversa da 1, dimostrare che tutte le radici sono $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$.
(b) Dimostrare che $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$.
(c) Generalizzare i risultati di (a) e (b) all'equazione $z^n = 1$.

DERIVATE, EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

62. (a) Data $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, determinare direttamente dalla definizione $\dfrac{dw}{dz}$.
(b) Per quali valori finiti di z, $f(z)$ non è analitica?
Risp. (a) $1 - 1/z^2$, (b) $z = 0$

63. Data la funzione $w = z^4$. (a) Determinare le funzioni reali u e v tali per cui $w = u + iv$. (b) Dimostrare che in tutti i punti del piano z valgono le equazioni di Cauchy-Riemann. (c) Dimostrare che u e v sono funzioni armoniche. (d) Determinare dw/dz. *Risp.* (a) $u = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v = 4x^3y - 4xy^3$ (d) $4z^3$

64. Dimostrare che $f(z) = z\,|z|$ non è analitica in alcun punto del piano.

65. Dimostrare che $f(z) = \dfrac{1}{z - 2}$ è analitica in ogni regione che non comprenda il punto $z = 2$.

66. Se $2x(1 - y)$ è la parte immaginaria di una funzione analitica, determinare (a) la parte reale, (b) la funzione.
Risp. (a) $y^2 - x^2 - 2y + c$, (b) $2iz - z^2 + c$, dove c è reale.

67. Costruire una funzione analitica $f(z)$ la cui parte reale è $e^{-x}(x \cos y + y \sin y)$ e per cui sia $f(0) = 1$.
Risp. $ze^{-z} + 1$

68. Dimostrare che non esiste funzione analitica la cui parte immaginaria sia $x^2 - 2y$.

69. Determinare $f(z)$ tale per cui $f'(z) = 4z - 3$ e $f(1 + i) = -3i$. *Risp.* $f(z) = 2z^2 - 3z + 3 - 4i$

INTEGRALI DI LINEA

70. Calcolare $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x + y)\,dx + (y - x)\,dy$ lungo (a) la parabola $y^2 = x$, (b) una linea retta, (c) la spezzata per i punti $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$, (d) la linea $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.
Risp. (a) $34/3$, (b) 11, (c) 14, (d) $32/3$

71. Calcolare $\displaystyle\oint (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy$ lungo il triangolo del piano xy con vertici nei punti $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$ percorso in senso antiorario. *Risp.* 12

72. Calcolare l'integrale di linea del problema precedente lungo un cerchio di raggio 4 e centro in $(0, 0)$.
Risp. 64π

TEOREMA DI GREEN NEL PIANO. INDIPENDENZA DAL PERCORSO

73. Verificare il teorema di Green nel piano per $\displaystyle\oint_C (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$ dove C è un quadrato con i vertici in $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$. *Risp.* Il valore comune è 8

74. (a) Sia C una qualsiasi linea semplice chiusa che racchiude una regione di area A. Dimostrare che se $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ sono costanti,

$$\oint_C (a_1x + a_2y + a_3)\,dx + (b_1x + b_2y + b_3)\,dy = (b_1 - a_2)A$$

(b) A quali condizioni è nullo l'integrale di linea lungo qualsiasi percorso C? *Risp.* (b) $a_2 = b_1$

75. Determinare l'area delimitata dalla ipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
[*Suggerimento.* Le equazioni parametriche sono $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$.] *Risp.* $3\pi a^2/8$

76. Se $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$, dimostrare che $\frac{1}{2} \displaystyle\oint x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \int r^2\,d\theta$ e interpretare.

77. (a) Verificare il teorema di Green nel piano per $\displaystyle\oint_C (x^3 - x^2y)\,dx + xy^2\,dy$, dove C è il contorno della regione racchiusa dai due cerchi $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 16$. (b) Calcolare gli integrali di linea dati nei problemi 71 e 72 col teorema di Green. *Risp.* (a) Valore comune $= 120\pi$

78. (a) Dimostrare che $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)\,dx + (x^2 - 4xy^3)\,dy$ è indipendente dal percorso che congiunge i punti $(1, 0)$ e $(2, 1)$. (b) Calcolare l'integrale indicato in (a). *Risp.* (b) 5

INTEGRALI, TEOREMA DI CAUCHY, FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY

79. Calcolare $\int_{1-2i}^{3+i} (2z+3)\,dz$:

(*a*) lungo il percorso $x = 2t+1,\ y = 4t^2 - t - 2$ dove $0 \leqq t \leqq 1$

(*b*) lungo il segmento di retta tra $1 - 2i$ e $3 + i$.

(*c*) lungo la spezzata tra $1 - 2i$, $1 + i$ e $3 + i$.

Risp. $17 + 19i$ in tutti e tre i casi.

80. Calcolare $\int_C (z^2 - z + 2)\,dz$, dove C è la metà superiore del cerchio $|z| = 1$ percorso in senso positivo.

Risp. $-14/3$

81. Calcolare $\oint_C \frac{z\,dz}{2z-5}$, dove C è il cerchio (*a*) $|z| = 2$, (*b*) $|z-3| = 2$. *Risp.* (*a*) 0, (*b*) $5\pi i/2$

82. Calcolare $\oint_C \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}\,dz$, dove C è: (*a*) un quadrato con i vertici in $-1-i,\ -1+i,\ -3+i,\ -3-i$; (*b*) il cerchio $|z+i| = 3$; (*c*) il cerchio $|z| = \sqrt{2}$. *Risp.* (*a*) $-8\pi i/3$ (*b*) $-2\pi i$ (*c*) $2\pi i/3$

83. Calcolare (*a*) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1}\,dz$, (*b*) $\oint_C \frac{e^z + z}{(z-1)^4}\,dz$ dove C è una qualsiasi linea semplice chiusa che racchiude $z = 1$. *Risp.* (*a*) $-2\pi i$ (*b*) $\pi i e/3$

84. Dimostrare le formule integrali di Cauchy.
[*Suggerimento.* Usare la definizione di derivata e quindi applicare la induzione matematica.]

SERIE E SINGOLARITA'

85. Per quali valori di z convergono le serie date?

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n!}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z-i)^n}{n+1}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n!\,(z^2+2z+2)^{2n}$

Risp. (*a*) per qualsiasi z (*b*) $|z-i| < 1$ (*c*) $z = -1 \pm i$

86. Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$ è (*a*) assolutamente convergente, (*b*) uniformemente convergente per $|z| \leqq 1$.

87. Dimostrare che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$ converge uniformemente all'interno di qualsiasi cerchio di raggio R per cui $|z+i| < R < 2$.

88. Localizzare nel piano z tutte le singolarità eventualmente presentate dalle funzioni date e classificarle.

(*a*) $\frac{z-2}{(2z+1)^4}$, (*b*) $\frac{z}{(z-1)(z+2)^2}$, (*c*) $\frac{z^2+1}{z^2+2z+2}$, (*d*) $\cos \frac{1}{z}$, (*e*) $\frac{\sin(z-\pi/3)}{3z-\pi}$, (*f*) $\frac{\cos z}{(z^2+4)^2}$.

Risp. (*a*) $z = -\frac{1}{2}$, polo di ordine 4
(*b*) $z = 1$, polo semplice $z = -2$, polo doppio
(*c*) poli semplici $z = -1 \pm i$
(*d*) $z = 0$, singolarità essenziale
(*e*) $z = \pi/3$, singolarità eliminabile
(*f*) $z = \pm 2i$, poli doppi

89. Determinare le serie di Laurent delle funzioni date attorno alle singolarità indicate, classificando inoltre dette singolarità. Indicare per ogni serie la regione di convergenza.

(*a*) $\frac{\cos z}{z-\pi}$; $z = \pi$ (*b*) $z^2 e^{-1/z}$; $z = 0$ (*c*) $\frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$; $z = 1$

Risp. (*a*) $-\frac{1}{z-\pi} + \frac{z-\pi}{2!} - \frac{(z-\pi)^3}{4!} + \frac{(z-\pi)^5}{6!} - \cdots$, polo semplice, per ogni $z \neq \pi$

(*b*) $z^2 - z + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} - \frac{1}{5!\,z^3} + \cdots$, singolarità essenziale, per ogni $z \neq 0$

(*c*) $\frac{1}{4(z-1)^2} + \frac{7}{16(z-1)} + \frac{9}{64} - \frac{9(z-1)}{256} + \cdots$, polo doppio, $0 < |z-1| < 4$

RESIDUI E TEOREMA DEI RESIDUI

90. Determinare i residui delle funzioni date nei loro poli:

(*a*) $\frac{2z+3}{z^2-4}$, (*b*) $\frac{z-3}{z^3+5z^2}$, (*c*) $\frac{e^{zt}}{(z-2)^3}$, (*d*) $\frac{z}{(z^2+1)^2}$.

Risp. (*a*) $z = 2$; $7/4$, $z = -2$; $1/4$
(*b*) $z = 0$; $8/25$, $z = -5$; $-8/25$
(*c*) $z = 2$; $\frac{1}{2}t^2 e^{2t}$
(*d*) $z = i$; 0, $z = -i$; 0

91. Determinare il residuo di $e^{zt} \tan z$ nel polo semplice $z = 3\pi/2$. *Risp.* $-e^{3\pi t/2}$

92. Calcolare $\oint_C \frac{z^2\,dz}{(z+1)(z+3)}$, dove C è una linea semplice chiusa che racchiude tutti i poli. *Risp.* $-8\pi i$

93. Se C è una linea semplice chiusa che racchiude $z = \pm i$, dimostrare che

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}\,dz = \tfrac{1}{2}t \sin t$$

94. Se $f(z) = P(z)/Q(z)$, dove $P(z)$ e $Q(z)$ sono polinomi tali che il grado di $P(z)$ sia inferiore almeno di due al grado di $Q(z)$, dimostrare che $\oint_C f(z)\,dz = 0$, dove C racchiude tutti i poli di $f(z)$.

CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI

Usare l'integrazione al contorno per verificare ognuna delle eguaglianze indicate.

95. $\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

96. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+a^6} = \frac{2\pi}{3a^5}$, $a > 0$

97. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{\pi}{32}$

98. $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3+1}\,dx = \frac{\pi}{3}$

99. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}a^{-7}$, $a > 0$

100. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} = \frac{\pi}{9}$

101. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

102. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

103. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \frac{\pi}{8}$

104. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$

105. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta\,d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $0 < a < 1$

106. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^3} = \frac{(2a^2+b^2)\pi}{(a^2-b^2)^{5/2}}$, $a > b$

107. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin 2x}{x^2+4}\,dx = \frac{\pi e^{-4}}{4}$

108. $\int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+4}\,dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{8}$

109. $\int_0^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi^2 e^{-\pi}}{4}$

110. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi(2e-3)}{4e}$

111. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$

112. $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,dx = \frac{3\pi}{8}$

113. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\cosh x}\,dx = \frac{\pi}{2\cosh(\pi/2)}$ (*Suggerimento.* Considerare $\oint_C \frac{e^{iz}}{\cosh z}\,dz$, dove C è un rettangolo con i vertici in $(-R, 0)$, $(R, 0)$, (R, π), $(-R, \pi)$. Quindi porre $R \to \infty$.)

PROBLEMI VARI

114. Se $z = re^{i\theta}$ e $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$, dove r e θ sono coordinate polari, dimostrare che le equazioni di Cauchy-Riemann diventano

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

115. Se $w = f(z)$, con $f(z)$ analitica, definisce una trasformazione dal piano z al piano w dove $z = x + iy$ e $w = u + iv$, dimostrare che lo jacobiano della trasformazione è dato da

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2$$

116. Sia $F(x, y)$ trasformata in $G(u, v)$ dalla trasformazione $w = f(z)$. Dimostrare che se $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, allora in tutti i punti in cui $f'(z) \neq 0$, $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial v^2} = 0$.

117. Dimostrare che con la *trasformazione bilineare* $w = \frac{az+b}{cz+d}$, dove $ad - bc \neq 0$, i cerchi del piano z sono trasformati in cerchi del piano w.

118. Se $f(z)$ è analitica all'interno e sopra il cerchio $|z - a| = R$, dimostrare la *diseguaglianza di Cauchy*, cioè che

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!\,M}{R^n}$$

dove $|f(z)| \leq M$ sul cerchio. (*Suggerimento.* Usare le formule integrali di Cauchy).

119. Siano C_1 e C_2 cerchi concentrici con centro in a e raggi rispettivamente r_1 e r_2, dove $r_1 < r_2$. Se $a + h$ è un punto qualsiasi della regione anulare delimitata da C_1 e C_2, e $f(z)$ è analitica in detta regione, dimostrare il *teorema di Laurent*, cioè che

$$f(a+h) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n h^n$$

dove

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$$

C essendo una linea chiusa qualsiasi della regione angolare che comprende C_1.

(*Suggerimento.* Scrivere $f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(z)\,dz}{z-(a+h)} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)\,dz}{z-(a+h)}$ e sviluppare $\frac{1}{z-a-h}$ in due modi diversi).

120. Trovare uno sviluppo in serie di Laurent per la funzione $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$ che converga per $1 < |z| < 2$ e diverga altrove.

(*Suggerimento.* Scrivere $\frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{-1}{z+1} + \frac{2}{z+2} = \frac{-1}{z(1+1/z)} + \frac{1}{1+z/2}$.)

Risp. $\cdots - \frac{1}{z^5} + \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \cdots$

CAPITOLO 6

Serie e integrali di Fourier

SERIE DI FOURIER

Sia $F(x)$ una funzione che soddisfa alle seguenti condizioni:

1. $F(x)$ è definita nell'intervallo $c < x < c + 2l$.
2. $F(x)$ e $F'(x)$ sono generalmente continue in $c < x < c + 2l$.
3. $F(x + 2l) = F(x)$, cioè $F(x)$ è periodica di periodo $2l$.

Allora in ogni punto di continuità si ha

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

dove

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

In un punto di discontinuità, il primo membro della (*1*) è sostituito da $\frac{1}{2}\{F(x+0) + F(x-0)\}$, cioè dal valore medio dei limiti destro e sinistro nella discontinuità.

La serie (*1*) con i coefficienti (*2*) è detta *serie di Fourier* di $F(x)$. In molti casi, $c = 0$ o $-l$. Nel caso in cui $l = \pi$, $F(x)$ ha periodo 2π e la (*1*) e le (*2*) si semplificano.

Le condizioni sopra poste sono dette anche *condizioni di Dirichlet* e sono condizioni sufficienti (ma non necessarie) per la convergenza della serie di Fourier.

FUNZIONI DISPARI E FUNZIONI PARI

Si dice che una funzione $F(x)$ è *dispari* se $F(-x) = -F(x)$. Le funzioni x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, $\sin x$, $\tan 3x$ sono ad es. funzioni dispari.

Si dice che una funzione $F(x)$ è *pari* se $F(-x) = F(x)$. Le funzioni x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ sono ad es. funzioni pari.

Le funzioni indicate graficamente nelle figg. 6-1 e 6-2 sono rispettivamente dispari e pari, ma quella di fig. 6-3 invece non è né dispari né pari.

Nella serie di Fourier corrispondente ad una funzione dispari, possono figurare solo i termini seno. In una serie di Fourier corrispondente ad una funzione pari possono figurare solo i termini coseno (più eventualmente una costante che si considera un termine coseno).

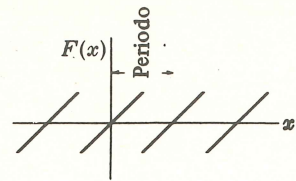
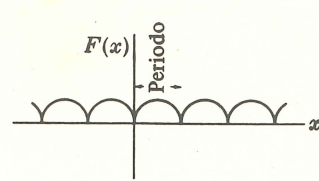
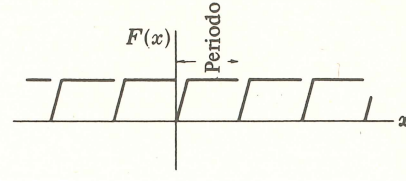



Fig. 6-1 Fig. 6-2 Fig. 6-3

SERIE DI FOURIER DI SOLI SENI E DI SOLI COSENI

Una serie di Fourier di soli seni o di soli coseni è una serie in cui figurano rispettivamente solo termini seni o termini coseni. Quando si vuole una serie di soli seni o di soli coseni corrispondente ad una data funzione, la funzione è in generale definita nell'intervallo $(0, l)$ [che è la metà dell'intervallo $(-l, l)$, il che spiega la denominazione di *serie a metà intervallo* usata per questo tipo di serie] e la funzione è definita o come dispari o come pari, con il che risulta chiaramente definita anche nell'altra metà dell'intervallo, cioè in $(-l, 0)$. In tal caso si ha

$$\left.\begin{array}{ll} a_n = 0, \quad b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx & \text{per } \textit{una serie di soli seni} \\ b_n = 0, \quad a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx & \text{per } \textit{una serie di soli coseni} \end{array}\right\} \tag{3}$$

FORMA COMPLESSA DELLE SERIE DI FOURIER

In forma complessa, la serie di Fourier (*1*) e i coefficienti (*2*) possono essere scritti come

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/l} \tag{4}$$

dove, ponendo $c = -l$,

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\, e^{-in\pi x/l}\,dx \tag{5}$$

(v. problema 74).

IDENTITA' DI PARSEVAL PER LE SERIE DI FOURIER

L'identità di Parseval afferma che

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{6}$$

dove a_n e b_n sono date dalle (*2*).

Una conseguenza importante è che

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

Questo è detto *teorema di Riemann.*

TRASFORMATE FINITE DI FOURIER

La *trasformata finita seno di Fourier* di $F(x)$, $0 < x < l$, è per definizione

$$f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{8}$$

dove n è un numero intero. La funzione $F(x)$ è detta la *antitrasformata finita seno di Fourier* di $f_s(n)$ ed è data da

$$F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

La *trasformata finita coseno di Fourier* di $F(x)$, $0 < x < l$, è per definizione

$$f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{10}$$

dove n è un numero intero. La funzione $F(x)$ è detta *antitrasformata finita coseno di Fourier* di $f_c(n)$ ed è data da

$$F(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{11}$$

(v. problemi 9-11).

Le trasformate finite di Fourier sono utili per la soluzione di equazioni differenziali (v. problema 32).

L'INTEGRALE DI FOURIER

Sia $F(x)$ una funzione che soddisfa alle seguenti condizioni:

1. $F(x)$ soddisfa alle condizioni di Dirichlet in ogni intervallo finito $-l \leqq x \leqq l$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\,dx$ converge, cioè $F(x)$ è assolutamente integrabile nell'intervallo $-\infty < x < \infty$.

Allora il *teorema integrale di Fourier* afferma che

$$F(x) = \int_0^{\infty}\{A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\}\,d\lambda \tag{12}$$

dove

$$\left.\begin{array}{l} A(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x\,dx \\ B(\lambda) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x\,dx \end{array}\right\} \tag{13}$$

Una scrittura equivalente di ciò è

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\lambda=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\cos\lambda(x-u)\,du\,d\lambda \tag{14}$$

La relazione (*12*) è valida se x è un punto di continuità di $F(x)$. Se x è un punto di discontinuità, bisogna sostituire a $F(x)$, $\frac{1}{2}\{F(x+0) + F(x-0)\}$, come nel caso delle serie di Fourier. Come per le serie di Fourier, le condizioni date sono sufficienti ma non necessarie.

E' evidente la somiglianza che esiste tra le (*12*) e (*13*) e le corrispondenti (*1*) e (*2*) relative alle serie di Fourier. Il secondo membro della (*12*) è detto anche *sviluppo di F(x) in integrale di Fourier* o brevemente *integrale di Fourier.*

FORMA COMPLESSA DEGLI INTEGRALI DI FOURIER

In forma complessa, l'integrale di Fourier (*12*) con i coefficienti (*13*) può essere scritto come

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u}\, du \qquad (15)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{i\lambda(x-u)}\, du\, d\lambda$$

(v. problema 77).

TRASFORMATE DI FOURIER

Dalla (*15*) segue che se

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du \qquad (16)$$

allora

$$F(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda u} f(\lambda)\, d\lambda \qquad (17)$$

che, sostituendo x a u, dà $F(x)$.

La funzione $f(\lambda)$ è detta *trasformata di Fourier* di $F(x)$ e a volte si scrive $f(\lambda) = \mathcal{F}\{F(x)\}$. La funzione $F(x)$ è l'*antitrasformata* di $f(\lambda)$ e si scrive $F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\lambda)\}$. Si dice anche che la (*17*) è *la formula di inversione* corrispondente alla (*16*).

Si noti che le costanti che precedono il segno di integrale possono essere costanti qualsiasi il cui prodotto sia $1/2\pi$. Se ognuna di esse è posta eguale a $1/\sqrt{2\pi}$ si ha la cosiddetta *forma simmetrica.*

TRASFORMATE SENO E COSENO DI FOURIER

La *trasformata (infinita) seno di Fourier* di $F(x)$, $0 < x < \infty$, è per definizione

$$f_S(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \sin \lambda u\, du \qquad (18)$$

La funzione $F(x)$ è detta *antitrasformata seno di Fourier* di $f_S(\lambda)$ ed è data da

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_S(\lambda) \sin \lambda x\, d\lambda \qquad (19)$$

La *trasformata (infinita) coseno di Fourier* di $F(x)$, $0 < x < \infty$, è per definizione

$$f_C(\lambda) = \int_0^{\infty} F(u) \cos \lambda u\, du \qquad (20)$$

La funzione $F(x)$ è detta *antitrasformata coseno di Fourier* di $f_C(\lambda)$ ed è data da

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f_C(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda \qquad (21)$$

(v. problemi 18-20).

Le trasformate di Fourier sono usate nella risoluzione di equazioni differenziali (v. problema 33).

IL TEOREMA DELLA CONVOLUZIONE

La *convoluzione* di due funzioni $F(x)$ e $G(x)$, con $-\infty < x < \infty$, è per definizione

$$F * G = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, G(x-u)\, du = H(x) \qquad (22)$$

Una formula importante, nota come *teorema della convoluzione delle trasformate di Fourier*, è la seguente.

Teorema. Se $H(x)$ è la convoluzione di $F(x)$ e $G(x)$, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx\right\} \qquad (23)$$

o

$$\mathcal{F}\{F * G\} = \mathcal{F}\{F\}\, \mathcal{F}\{G\} \qquad (24)$$

cioè la trasformata di Fourier della convoluzione di F e G è il prodotto delle trasformate di Fourier di F e G.

IDENTITA' DI PARSEVAL PER GLI INTEGRALI DI FOURIER

Se la trasformata di Fourier di $F(x)$ è $f(\lambda)$, allora

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\lambda \qquad (25)$$

Questa formula è detta *identità di Parseval per gli integrali di Fourier.* La formula si presta a generalizzazioni (v. problema 80).

RELAZIONE TRA TRASFORMATE DI FOURIER E TRASFORMATE DI LAPLACE

Si consideri la funzione

$$F(t) = \begin{cases} e^{-xt}\,\Phi(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (26)$$

Allora dalla (*16*), pag. 176, con y al posto di λ, si vede che la trasformata di Fourier di $F(t)$ è

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(x+iy)t}\,\Phi(t)\, dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\Phi(t)\, dt \qquad (27)$$

dove si è posto $s = x + iy$. L'ultimo membro della (*27*) è la trasformata di Laplace di $\Phi(t)$ e la formula dà la relazione esistente tra le trasformate di Fourier e di Laplace. Essa chiarisce anche il bisogno di considerare s come variabile complessa $x + iy$.

Per chiarire meglio ancora la relazione, si noti che se $F(t)$ e $G(t)$ sono nulle per $t<0$, la convoluzione di F e G data dalla (22) può essere scritta

$$F * G \quad = \quad \int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du \tag{28}$$

e la (24) corrisponde a

$$\mathcal{L}\{F*G\} \quad = \quad \mathcal{L}\{F\}\,\mathcal{L}\{G\} \tag{29}$$

in accordo con la (11) di pag. 45.

In base al fatto che per le trasformate di Fourier si è data una formula di inversione (17) corrispondente alla (16), è facile pensare che ci debba essere una corrispondente formula di inversione per le trasformate di Laplace. Tale formula di inversione verrà ricavata nel cap. 7.

PROBLEMI RISOLTI

SERIE DI FOURIER

1. Dimostrare che $\int_{-l}^{l} \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = 0$ se $k = 1,2,3,\ldots$.

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad = \quad -\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} \quad = \quad -\frac{l}{k\pi}\cos k\pi + \frac{l}{k\pi}\cos(-k\pi) \quad = \quad 0$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} \quad = \quad \frac{l}{k\pi}\sin k\pi - \frac{l}{k\pi}\sin(-k\pi) \quad = \quad 0$$

2. Dimostrare che

(a) $$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \begin{cases}0 & m\neq n\\ l & m=n\end{cases}$$

(b) $$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad 0$$

dove m e n possono assumere un qualsiasi valore $1,2,3,\ldots$.

(a) Dalla trigonometria: $\cos A\cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$, $\sin A\sin B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$.

Allora, se $m\neq n$, per il problema 1,

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} + \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx \quad = \quad 0$$

Analogamente se $m\neq n$,

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\cos\frac{(m-n)\pi x}{l} - \cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx \quad = \quad 0$$

Si noti che se $m=n$ questi integrali sono eguali rispettivamente a $2l$ e 0.

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx \quad = \quad l$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx \quad = \quad l$$

(b) Si ha $\sin A\cos B = \frac{1}{2}\{\sin(A-B)+\sin(A+B)\}$. Allora per il problema 1, se $m\neq n$,

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left\{\sin\frac{(m-n)\pi x}{l} + \sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\right\}dx \quad = \quad 0$$

Se $m=n$,

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}\,dx \quad = \quad 0$$

I risultati delle parti (a) e (b) restano validi anche quando i limiti di integrazione $-l$, l sono sostituiti rispettivamente da c e $c+2l$.

3. Dimostrare che, se la serie $A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$ converge uniformemente a $f(x)$ nell'intervallo $(-l, l)$, per $n = 1,2,3,\ldots$,

(a) $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (b) $b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (c) $A = \frac{a_0}{2}$

(a) Moltiplicando

$$F(x) \quad = \quad A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

per $\cos\frac{m\pi x}{l}$ e integrando tra $-l$ e l, usando il problema 2, si ha

$$\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad = \quad A\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= \quad a_m l \qquad \text{se } m\neq 0$$

Quindi $$a_m \quad = \quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad \text{se } m = 1,2,3,\ldots$$

(b) Moltiplicando la (1) per $\sin\frac{m\pi x}{l}$ e integrando tra $-l$ e l, usando il problema 2, si ha

$$\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \quad = \quad A\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \tag{3}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= \quad b_m l$$

Quindi $$b_m \quad = \quad \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx \qquad \text{se } m = 1,2,3,\ldots$$

(c) L'integrazione della (1) tra $-l$ e l, usando il problema 1, dà

$$\int_{-l}^{l} F(x)\,dx = 2Al \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$$

Ponendo $m = 0$ nel risultato della parte (a), si ha $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\,dx$ e $A = \frac{a_0}{2}$.

I risultati ottenuti valgono anche se i limiti di integrazione $-l$, l sono sostituiti da c e $c + 2l$.

Si noti che in tutte le dimostrazioni date sopra lo scambio tra il segno di integrazione e quello di sommatoria è valido perché si è supposto che la serie convergesse uniformemente a $F(x)$ nell'intervallo $(-l, l)$. Anche nel caso in cui tale ipotesi non è assicurata, i coefficienti a_m e b_m come ricavati sopra sono detti *coefficienti di Fourier* corrispondenti a $F(x)$, e la serie corrispondente con questi valori di a_m e b_m è detta *serie di Fourier* corrispondente a $F(x)$. Un problema importante in questo caso consiste nell'indagare le condizioni alle quali questa serie converge effettivamente a $F(x)$. Condizioni sufficienti di tale convergenza sono le *condizioni di Dirichlet* enunciate appresso (v. problemi 12-17).

4. (a) Determinare i coefficienti di Fourier corrispondenti alla funzione

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

(b) Scrivere la serie di Fourier corrispondente.

(c) Come si deve definire $F(x)$ per $x = -5$, $x = 0$ e $x = 5$ per fare in modo che la serie di Fourier converga a $F(x)$ per $-5 \leqq x \leqq 5$?

In fig. 6-4 è dato il grafico di $F(x)$.

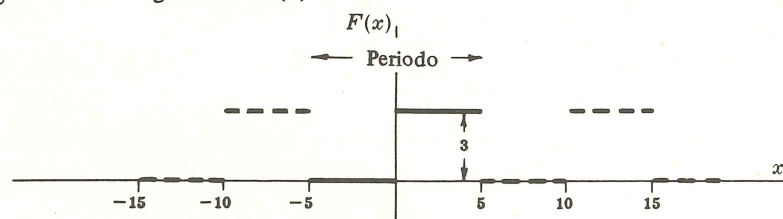



Fig. 6-4

(a) Periodo $= 2l = 10$ e $l = 5$. Scegliere come intervallo $c, c + 2l$ l'intervallo $-5, 5$ per cui $c = -5$. Allora

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = 0 \qquad \text{se } n \neq 0$$

Se $n = 0$, $a_n = a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}\,dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3.$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} F(x)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx + \int_0^5 (3)\sin\frac{n\pi x}{5}\,dx\right\} = \frac{3}{5}\int_0^5 \sin\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Big|_0^5 = \frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}$$

(b) La serie di Fourier corrispondente è

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5} + \cdots\right)$$

(c) Dato che $F(x)$ soddisfa alle condizioni di Dirichlet, si può affermare che la serie converge a $F(x)$ in tutti i punti di continuità e a $\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$ nei punti di discontinuità. Per $x = -5, 0$ e 5, che sono punti di discontinuità, la serie converge a $(3+0)/2 = 3/2$ come si vede dal grafico. Se si ridefinisce $F(x)$ nel modo seguente,

$$F(x) = \begin{cases} 3/2 & x = -5 \\ 0 & -5 < x < 0 \\ 3/2 & x = 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \\ 3/2 & x = 5 \end{cases} \qquad \text{Periodo} = 10$$

allora la serie convergerà a $F(x)$ per $-5 \leqq x \leqq 5$.

5. Sviluppare $F(x) = x^2$, $0 < x < 2\pi$ in serie di Fourier se (a) il periodo è 2π, (b) il periodo non è specificato.

(a) Il grafico di $F(x)$ quando il periodo è 2π è riportato in fig. 6-5.

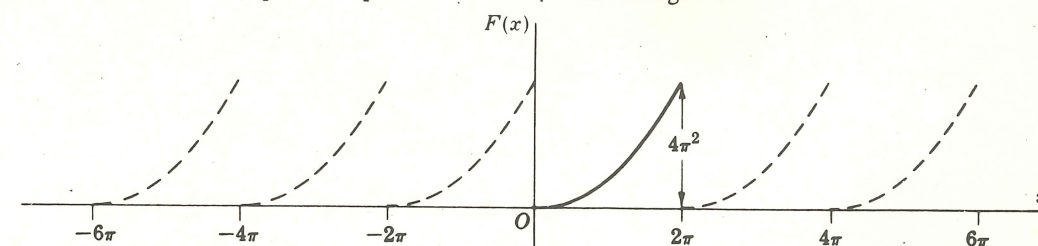



Fig. 6-5

Periodo $= 2l = 2\pi$ e $l = \pi$. Scegliendo $c = 0$ si ha

$$a_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - (2x)\left(\frac{-\cos nx}{n^2}\right) + 2\left(\frac{-\sin nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}, \qquad n \neq 0$$

Se $n = 0$, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\,dx = \frac{8\pi^2}{3}$.

$$b_n = \frac{1}{l}\int_c^{c+2l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{(x^2)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - (2x)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)\right\}\Big|_0^{2\pi} = \frac{-4\pi}{n}$$

Allora $F(x) = x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$.

Ciò vale per $0 < x < 2\pi$. Per $x = 0$ e $x = 2\pi$ la serie converge a $2\pi^2$.

(b) Se il periodo non è specificato, in generale la serie di Fourier non può essere determinata in modo univoco.

FUNZIONI DISPARI E FUNZIONI PARI. SERIE DI FOURIER DI SOLI SENI E DI SOLI COSENI

6. Se $F(x)$ è pari, dimostrare che (a) $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$, (b) $b_n = 0$.

(a) $$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

Posto $x = -u$,

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{l}\right)du = \frac{1}{l}\int_0^l F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du$$

dato che per definizione per una funzione pari $f(-u) = f(u)$. Allora

$$a_n = \frac{1}{l}\int_0^l F(u)\cos\frac{n\pi u}{l}\,du + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

(b) $$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (1)$$

Se si introduce la trasformazione $x = -u$ nel primo integrale sulla destra della (1), si ha

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{0} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\sin\left(-\frac{n\pi u}{l}\right)du = -\frac{1}{l}\int_0^l F(-u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du \quad (2)$$

$$= -\frac{1}{l}\int_0^l F(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du = -\frac{1}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

dove si è sfruttato il fatto che per una funzione pari $F(-u) = F(u)$ e nell'ultimo passaggio il fatto che la variabile fittizia di integrazione u può essere sostituita da qualsiasi altro simbolo, in particolare x. Così dalla (1), usando la (2), si ha

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx + \frac{1}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = 0$$

7. Sviluppare $F(x) = x,\ 0 < x < 2$, (a) in serie di soli seni, (b) in serie di soli coseni.

(a) Estendere la definizione della funzione data a quella della funzione dispari di periodo 4 indicata in fig. 6-6. Ciò è detto anche *estensione dispari* di $F(x)$. Allora $2l = 4,\ l = 2$.

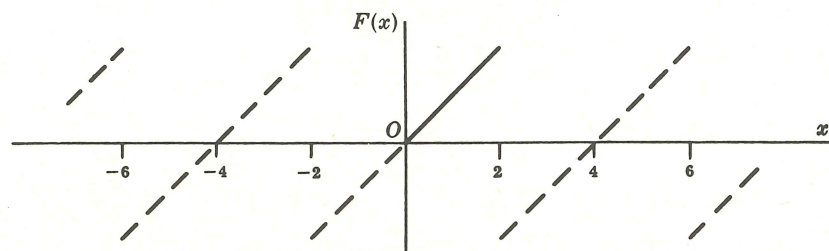



Fig. 6-6

Quindi $a_n = 0$ e

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2 = \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi$$

Allora $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{n\pi}\cos n\pi\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} - \cdots\right)$$

(b) Estendere la definizione di $F(x)$ a quella della funzione pari di periodo 4 indicata in fig. 6-7. Ciò è detto anche *estensione pari* di $F(x)$. Allora $2l = 4,\ l = 2$.

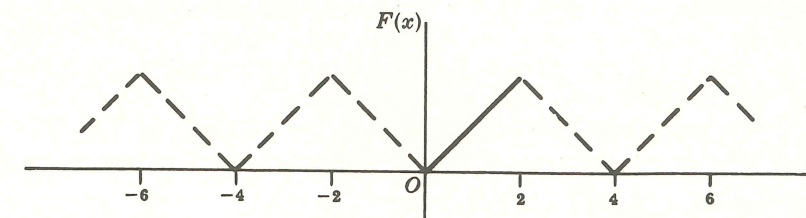



Fig. 6-7

Allora $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \left\{(x)\left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right) - (1)\left(\frac{-4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\right\}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) \quad \text{se } n \neq 0$$

Se $n = 0$, $a_0 = \int_0^2 x\,dx = 2$.

Quindi $$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2} + \cdots\right)$$

Si deve notare che la funzione data $F(x) = x,\ 0 < x < 2$ è rappresentata *egualmente bene* dalle due serie *diverse* date in (a) e in (b).

IDENTITA' DI PARSEVAL PER LE SERIE DI FOURIER

8. Supponendo che la serie di Fourier corrispondente a $F(x)$ converga uniformemente a $f(x)$ nell'intervallo $(-l, l)$, dimostrare la identità di Parseval

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum(a_n^2 + b_n^2)$$

dove si suppone che l'integrale esista.

Se $F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$, allora moltiplicando per $F(x)$ e integrando termine a termine tra $-l$ e l (il che è giustificato dato che la serie converge uniformemente) si ha

$$\int_{-l}^{l}\{F(x)\}^2\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}F(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx + b_n\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right\}$$

$$= \frac{a_0^2}{2}l + l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \quad (1)$$

dove si è fatto uso delle formule

$$\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = la_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = lb_n, \qquad \int_{-l}^{l} F(x)\,dx = la_0 \tag{2}$$

ottenute dai coefficienti di Fourier.

Il risultato cercato si ottiene dividendo ambedue i lati della (*1*) per l. La identità di Parseval è valida sotto condizioni meno restrittive di quelle poste nella presente dimostrazione.

TRASFORMATE FINITE DI FOURIER

9. Dimostrare (*a*) la equazione (*9*) e (*b*) la equazione (*11*) di pag. 175.

(*a*) Se $F(x)$ è una funzione dispari nell'intervallo $(-l, l)$, allora

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1}$$

dove

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{2}$$

Quindi se si scrive

$$\int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = f_s(n)$$

allora $b_n = \frac{2}{l}f_s(n)$ e la (*1*) può essere scritta, come volevasi, nella forma

$$F(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_s(n)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

Si può quindi scrivere $F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\{f_s(n)\}$.

(*b*) Se $F(x)$ è una funzione pari nell'intervallo $(-l, l)$, allora

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{4}$$

dove

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{5}$$

Quindi se si scrive

$$\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = f_c(n)$$

allora $a_0 = \frac{2}{l}f_c(0)$ e la (*4*) può essere scritta, come volevasi, nella forma

$$F(x) = \frac{1}{l}f_c(0) + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} f_c(n)\cos\frac{n\pi x}{l} \tag{6}$$

Si può quindi scrivere anche $F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\{f_c(n)\}$.

10. Determinare (*a*) la trasformata finita seno di Fourier e (*b*) la trasformata finita coseno di Fourier della funzione $F(x) = 2x, \quad 0 < x < 4$.

(*a*) Dato che $l = 4$, si ha

$$f_s(n) = \int_0^l F(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^4 2x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\sin n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 = -\frac{32}{n\pi}\cos n\pi$$

(*b*) Se $n > 0$,

$$f_c(n) = \int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^4 2x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \left\{(2x)\left(\frac{\sin n\pi x/4}{n\pi/4}\right) - (2)\left(\frac{-\cos n\pi x/4}{n^2\pi^2/16}\right)\right\}\Bigg|_0^4 = 32\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

Se $n = 0$,

$$f_c(n) = f_c(0) = \int_0^4 2x\,dx = 16$$

11. Determinare $F(x)$ se: (*a*) $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = 16(-1)^{n-1}/n^3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, dove $0 < x < 8$; (*b*) $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \sin(n\pi/2)/2n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $\pi/4$ se $n = 0$, dove $0 < x < 2\pi$.

(*a*) Dalla equazione (*3*) del problema 9 (*a*) con $l = 8$, si ha

$$F(x) = \mathcal{F}_s^{-1}\left\{\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\right\}$$

$$= \frac{2}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{8} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{8}$$

(*b*) Dalla equazione (*6*) del problema 9 (*b*) con $l = 2\pi$, si ha

$$F(x) = \mathcal{F}_c^{-1}\left\{\frac{\sin(n\pi/2)}{2n}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{2}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n}$$

CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

12. Dimostrare che (*a*) $\displaystyle\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt = \frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$

$$(b)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt = \frac{1}{2}.$$

(*a*) Si ha $\cos nt\sin\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\{\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin(n-\frac{1}{2})t\}$.
Allora sommando da $n = 1$ a M,

$$\sin\tfrac{1}{2}t\{\cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Mt\} = (\sin\tfrac{3}{2}t - \sin\tfrac{1}{2}t) + (\sin\tfrac{5}{2}t - \sin\tfrac{3}{2}t)$$
$$+ \cdots + \{\sin(M+\tfrac{1}{2})t - \sin(M-\tfrac{1}{2})t\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{\sin(M+\tfrac{1}{2})t - \sin\tfrac{1}{2}t\}$$

Dividendo per $\sin 1/2t$ e aggiungendo $1/2$, si ottiene il risultato cercato.

(*b*) Integrare la formula ottenuta in (*a*) tra $-\pi$ e 0 e tra 0 e π rispettivamente. Ciò porta ai risultati voluti, dato che gli integrali di tutti i termini coseno sono nulli.

13. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx = 0$ se $F(x)$ è generalmente continua.

La dimostrazione segue direttamente dal problema 8 con $l=\pi$, dato che se la serie $\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$ è convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Il risultato ottenuto è detto anche *teorema di Riemann*.

14. Dimostrare che, se $F(x)$ è generalmente continua, $\lim_{M\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(M+\frac{1}{2})x\,dx = 0$.

Si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin(M+\tfrac{1}{2})x\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\sin\tfrac{1}{2}x\}\cos Mx\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}\{F(x)\cos\tfrac{1}{2}x\}\sin Mx\,dx$$

Quindi il risultato voluto segue immediatamente usando il risultato del problema 13, con al posto di $F(x)$ rispettivamente $F(x)\sin\frac{1}{2}x$ e $F(x)\cos\frac{1}{2}x$ che sono generalmente continue se tale è $F(x)$.

Il risultato può essere dimostrato anche se i limiti di integrazione sono a e b invece di $-\pi$ e π.

15. Supponendo che $l=\pi$, cioè che la serie di Fourier corrispondente a $F(x)$ abbia periodo $2l=2\pi$, dimostrare che

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

Usando le formule per i coefficienti di Fourier con $l=\pi$, si ha

$$\begin{aligned} a_n\cos nx + b_n\sin nx &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\cos nu\,du\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\sin nu\,du\right)\sin nx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)(\cos nu\cos nx + \sin nu \sin nx)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\cos n(u-x)\,du \end{aligned}$$

Inoltre,
$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\,du$$

Allora

$$\begin{aligned} S_M(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{M}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\,du + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{M}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\cos n(u-x)\,du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{M}\cos n(u-x)\right\}du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(u)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{1}{2}(u-x)}\,du \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il problema 12. Posto $u-x=t$, si ha

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt$$

Dato che l'integrando ha periodo 2π, si può sostituire all'intervallo $-\pi-x,\ \pi-x$ qualsiasi altro intervallo di lunghezza 2π, in particolare $-\pi,\pi$. Si ottiene quindi il risultato voluto.

16. Dimostrare che

$$\begin{aligned} S_M(x) - \left(\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(\frac{F(t+x)-F(x-0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin(M+\tfrac{1}{2})t\,dt \\ &+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}\right)\sin(M+\tfrac{1}{2})t\,dt \end{aligned}$$

Dal problema 12,

$$S_M(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}F(t+x)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (1)$$

Moltiplicando gli integrali del problema 12(*b*) per $F(x-0)$ e $F(x+0)$ rispettivamente,

$$\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}F(x-0)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}F(x+0)\frac{\sin(M+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt \qquad (2)$$

Sottraendo la (*2*) dalla (*1*) si ottiene il risultato voluto.

17. Dimostrare che, se $F(x)$ e $F'(x)$ sono generalmente continue nell'intervallo $(-\pi,\pi)$,

$$\lim_{M\to\infty}S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

La funzione $\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ è generalmente continua in $0<t\leqq\pi$ dato che $F(x)$ è generalmente continua.

Inoltre,

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{1}{2}t} = \lim_{t\to 0+}\frac{F(t+x)-F(x+0)}{t}$$

esiste, dato che per ipotesi $F'(x)$ è generalmente continua cosicchè per ogni valore di x esiste la derivata destra di $F(x)$.

Quindi $\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ è generalmente continua in $0\leqq t\leqq\pi$.

Analogamente, $\frac{F(t+x)-F(x+0)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ è generalmente continua in $-\pi\leqq t\leqq 0$.

Allora per i problemi 14 e 16, si ha

$$\lim_{M\to\infty}S_M(x) - \left\{\frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}\right\} = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{M\to\infty}S_M(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$$

INTEGRALI DI FOURIER E TRASFORMATE DI FOURIER

18. (*a*) Determinare la trasformata di Fourier di $F(x) = \begin{cases}1 & |x|<a \\ 0 & |x|>a\end{cases}$.

(*b*) Tracciare il diagramma di $F(x)$ e della sua trasformata di Fourier per $a=1$.

(*a*) La trasformata di Fourier di $F(x)$ è

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,e^{-i\lambda u}\,du = \int_{-a}^{a}(1)\,e^{-i\lambda u}\,du = \left.\frac{e^{-i\lambda u}}{-i\lambda}\right|_{-a}^{a} \\ &= \left(\frac{e^{i\lambda a}-e^{-i\lambda a}}{i\lambda}\right) = 2\frac{\sin\lambda a}{\lambda}, \qquad \lambda\neq 0 \end{aligned}$$

Per $\lambda=0$, si ha $f(\lambda)=2a$.

(*b*) I grafici di $F(x)$ e $f(\lambda)$ per $a = 1$ sono riportati rispettivamente nelle figg. 6-8 e 6-9.

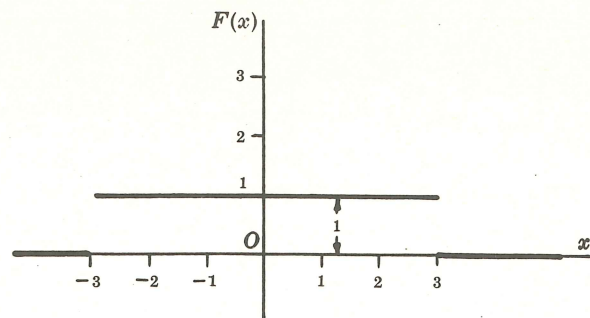
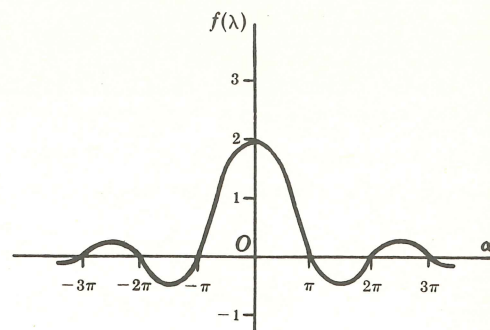



Fig. 6-8 **Fig. 6-9**

19. (*a*) Sfruttare il risultato del problema 18 per calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda}\, d\lambda$.

(*b*) Dedurre il valore di $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\, du$.

(*a*) Per il teorema integrale di Fourier, se

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u}\, du \qquad \text{allora} \qquad F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda$$

Allora dal problema 18,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\frac{\sin \lambda a}{\lambda}\, e^{i\lambda x}\, d\alpha = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 1/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{1}$$

Il primo membro della (*1*) è uguale a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda}\, d\alpha + \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \sin \lambda x}{\lambda}\, d\lambda \tag{2}$$

L'integrando del secondo integrale della (*2*) è dispari e quindi l'integrale è nullo. Allora dalla (*1*) e (*2*) si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda}\, d\lambda = \begin{cases} \pi & |x| < a \\ \pi/2 & |x| = a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

(*b*) Se $x = 0$ e $a = 1$ nel risultato ottenuto in (*a*), si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda}\, d\lambda = \pi \qquad \text{or} \qquad \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda}\, d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

dato che l'integrando è pari.

20. Dimostrare che se $F(x)$ è una funzione pari,

(*a*) $\displaystyle f(\lambda) = 2\int_0^{\infty} F(u) \cos \lambda u\, du$, (*b*) $\displaystyle F(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} f(\lambda) \cos \lambda x\, d\lambda$.

Si ha

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, e^{-i\lambda u} = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda u\, du - i\int_{-\infty}^{\infty} F(u) \sin \lambda u\, du \tag{1}$$

(*a*) Se $F(u)$ è pari, $F(u) \cos \lambda u$ è pari e $F(u) \sin \lambda u$ dispari. Allora il secondo integrale alla destra nella (*1*) è nullo e la formula può essere scritta nella forma

$$f(\lambda) = 2\int_0^{\infty} F(u) \cos \lambda u\, du$$

(*b*) Dalla (*a*), $f(-\lambda) = f(\lambda)$ per cui $f(\lambda)$ è una funzione pari. Allora seguendo un procedimento di prova esattamente eguale a quello usato in (*a*), si ottiene il risultato voluto.

Un risultato analogo vale per le funzioni dispari e si può ottenere sostituendo il seno al coseno.

IDENTITA' DI PARSEVAL PER GLI INTEGRALI DI FOURIER

21. Verificare l'identità di Parseval per gli integrali di Fourier per le trasformate di Fourier del problema 18.

Si deve dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F(x)\}^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \{f(\lambda)\}^2\, d\lambda$$

dove $F(x) = \begin{cases} 1 & |x| < a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$ e $f(\lambda) = 2\dfrac{\sin \lambda a}{\lambda}$.

Ciò equivale a

$$\int_{-a}^{a} (1)^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4 \sin^2 \lambda a}{\lambda^2}\, d\lambda$$

o

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2}\, d\lambda = 2\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2}\, d\lambda = \pi a$$

cioè

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda a}{\lambda^2}\, d\alpha = \frac{\pi a}{2}$$

Posto $\lambda a = u$ e sfruttando il problema 111, pag. 171, si constata che la formula è corretta. Il metodo serve anche per determinare direttamente $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA INTEGRALE DI FOURIER

22. Sviluppare una dimostrazione euristica del teorema integrale di Fourier usando una forma limite delle serie di Fourier.

Sia

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1}$$

dove $\displaystyle a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(u) \cos\frac{n\pi u}{l}\, du$ e $\displaystyle b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(u) \sin\frac{n\pi u}{l}\, du$.

Allora per sostituzione (v. problema 15),

$$F(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} F(u)\, du + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} F(u) \cos\frac{n\pi}{l}(u - x)\, du \tag{2}$$

Se si suppone che $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|\, du$ converga, il primo termine sulla destra della (*2*) tende a zero per $l \to \infty$, mentre la parte rimanente tende a

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos\frac{n\pi}{l}(u - x)\, du \tag{3}$$

Quest'ultimo passaggio non è rigoroso e rende euristica la dimostrazione.

Posto $\Delta\lambda = \pi/l$, la (3) può essere scritta come

$$F(x) \quad = \quad \lim_{\Delta\lambda \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\lambda \, F(n\,\Delta\lambda) \tag{4}$$

dove si è posto

$$f(\lambda) \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x)\, du \tag{5}$$

Ma il limite (4) è eguale a

$$F(x) \quad = \quad \int_0^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x)\, du$$

che è la formula integrale di Fourier.

Questa dimostrazione serve solo a dare un risultato possibile. Per essere rigorosi, occorre partire con l'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(u-x)\, dx$$

e valutarne la convergenza. Questo metodo è seguito nei problemi 23-26.

23. Dimostrare che (a) $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^l \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$, (b) $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-l}^0 \frac{\sin \lambda v}{v} dv = \frac{\pi}{2}$.

(a) Sia $\lambda v = y$. Allora $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^l \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; = \; \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda l} \frac{\sin y}{y} dy \; = \; \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy \; = \; \frac{\pi}{2}$ per il problema 43, pag. 164.

(b) Sia $\lambda v = -y$. Allora $\lim_{\lambda\to\infty} \int_{-l}^0 \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; = \; \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda l} \frac{\sin y}{y} dy \; = \; \frac{\pi}{2}$.

24. Il teorema di Riemann afferma che se $G(x)$ è generalmente continua in (a, b), allora

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b G(x) \sin \lambda x \, dx \quad = \quad 0$$

con una formula analoga per il coseno (v. problema 81). Servirsi di questo per dimostrare che

$$(a) \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^l F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad = \quad \frac{\pi}{2} F(x+0)$$

$$(b) \quad \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-l}^0 F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad = \quad \frac{\pi}{2} F(x-0)$$

dove si assume che $F(x)$ e $F'(x)$ siano generalmente continue rispettivamente in $(0, l)$ e $(-l, 0)$.

(a) Sfruttando il problema 23(a), si vede che una dimostrazione della formula indicata equivale a dimostrare che

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^l \{F(x+v) - F(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad = \quad 0$$

Ciò però segue immediatamente dal teorema di Riemann, dato che $G(v) = \frac{F(x+v) - F(x+0)}{v}$ è generalmente continua in $(0, l)$ poiché il $\lim_{v\to 0+} F(v)$ esiste e $f(x)$ è generalmente continua.

(b) Una dimostrazione di questa formula è analoga a quella data nella parte (a) se si sfrutta il problema 23(b).

25. Se $F(x)$ soddisfa alla condizione aggiuntiva che $\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|\, dx$ converga, dimostrare che

$$(a) \; \lim_{\alpha\to\infty} \int_0^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; = \; \frac{\pi}{2} F(x+0), \quad (b) \; \lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\infty}^0 F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; = \; \frac{\pi}{2} F(x-0).$$

(a) Si ha

$$\int_0^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad = \quad \int_0^l F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; + \; \int_l^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \tag{1}$$

$$\int_0^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \quad = \quad \int_0^l F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; + \; \int_l^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \tag{2}$$

Sottraendo,

$$\int_0^{\infty} \{F(x+v) - F(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv \tag{3}$$

$$= \int_0^l \{F(x+v) - f(x+0)\} \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; + \; \int_l^{\infty} F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} dv \; - \; \int_l^{\infty} F(x+0) \frac{\sin \lambda v}{v} dv$$

Indicando gli integrali che figurano nella (3) rispettivamente con I, I_1, I_2 e I_3, si ha $I = I_1 + I_2 + I_3$ per cui

$$|I| \quad \leqq \quad |I_1| \; + \; |I_2| \; + \; |I_3| \tag{4}$$

Ora

$$|I_2| \quad \leqq \quad \int_l^{\infty} \left| F(x+v) \frac{\sin \lambda v}{v} \right| dv \quad \leqq \quad \frac{1}{l} \int_l^{\infty} |F(x+v)|\, dv$$

E anche

$$|I_3| \quad \leqq \quad |F(x+0)| \left| \int_l^{\infty} \frac{\sin \lambda v}{v} dv \right|$$

Dato che $\int_0^{\infty} |F(x)|\, dx$ e $\int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda v}{v} dv$ convergono entrambi, si può scegliere l grande abbastanza perché $|I_2| \leqq \epsilon/3$, e $|I_3| \leqq \epsilon/3$. Inoltre si può scegliere λ grande abbastanza perché $|I_1| \leqq \epsilon/3$. Allora dalla (4) si ha $|I| < \epsilon$ per λ e l sufficientemente grandi, per cui si ottiene il risultato voluto.

(b) Il risultato si ottiene ragionando esattamente nella stessa maniera usata nella parte (a).

26. Dimostrare la formula integrale di Fourier dove $F(x)$ soddisfa alle condizioni poste a pag. 175.

Si deve dimostrare che

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^{l} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u)\, du\, d\lambda \quad = \quad \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$$

Dato che $\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u)\, du \right| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|\, du$ che converge, ne segue per il criterio di Weierstrass per gli integrali che $\int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u)\, du$ converge assolutamente e uniformemente per ogni valore di λ. Si può allora invertire l'ordine di integrazione e ottenere

$$\frac{1}{\pi} \int_{\lambda=0}^{l} d\lambda \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u) \cos \lambda(x-u)\, du \quad = \quad \frac{1}{\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u)\, du \int_{\lambda=0}^{l} \cos \lambda(x-u)\, du$$

$$= \quad \frac{1}{\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} F(u) \frac{\sin l(u-x)}{u-x} du$$

$$= \quad \frac{1}{\pi} \int_{v=-\infty}^{\infty} F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv$$

$$= \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv \; + \; \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F(x+v) \frac{\sin lv}{v} dv$$

dove si è posto $u = x + v$.

Per $l \to \infty$, si vede, in base al problema 24, che l'integrale dato converge a $\frac{F(x+0) + F(x-0)}{2}$ come richiesto.

PROBLEMI VARI

27. Sviluppare $F(x) = \sin x,\ 0 < x < \pi,$ in serie coseno di Fourier.

Una serie di Fourier consistente di soli termini coseno si ottiene solo per una funzione pari. Perciò si estende anzitutto la definizione di $F(x)$ in modo da avere una funzione pari (parte tratteggiata di fig. 6-10). Con questa estensione $F(x)$ risulta definita in un intervallo di lunghezza 2π. Assunto come periodo 2π, si ha $2l = 2\pi$ per cui $l = \pi$.

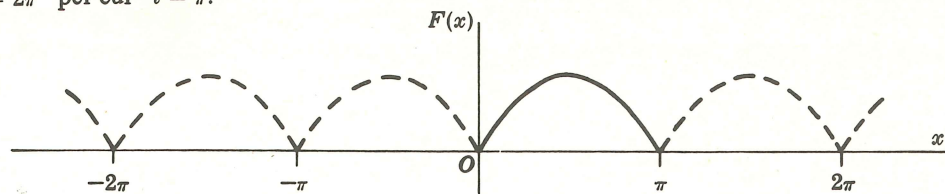



Fig. 6-10

Per il problema 6, $b_n = 0$ e

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \{\sin(x+nx) + \sin(x-nx)\}\,dx = \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right\}\Bigg|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1}\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1+\cos n\pi}{n+1} - \frac{1+\cos n\pi}{n-1}\right\}$$

$$= \frac{-2(1+\cos n\pi)}{\pi(n^2-1)} \qquad \text{se } n \neq 1.$$

Per $n = 1$, $\quad a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin^2 x}{2}\Bigg|_0^\pi = 0.$

Per $n = 0$, $\quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}(-\cos x)\Bigg|_0^\pi = \frac{4}{\pi}.$

Allora

$$F(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \frac{\cos 6x}{6^2-1} + \cdots\right)$$

28. Dimostrare che $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x},\quad x \geqq 0.$

Sia $F(x) = e^{-x}$ nel teorema integrale di Fourier

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty F(u)\cos\lambda u\,du$$

Allora

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda x\,d\lambda\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = e^{-x}$$

Dato che $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u}\cos\lambda u\,du = \frac{1}{\lambda^2+1}$, si ha

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = e^{-x} \qquad \text{o} \qquad \int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\,d\lambda = \frac{\pi}{2}e^{-x}$$

29. Risolvere l'equazione integrale $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = \begin{cases}1-\lambda & 0 \leqq \lambda \leqq 1\\ 0 & \lambda > 1\end{cases}$

Sia $\displaystyle\int_0^\infty F(x)\cos\lambda x\,dx = f(\lambda)$ e si assuma $f(\lambda) = \begin{cases}1-\lambda & 0 \leqq \lambda \leqq 1\\ 0 & \lambda > 1\end{cases}$ Allora per il teorema integrale di Fourier

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\lambda)\cos\lambda x\,d\lambda = \frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2}$$

30. Determinare (a) la trasformata finita seno di Fourier e (b) la trasformata finita coseno di Fourier di $\partial U/\partial x$ dove U è una funzione di x e di t per $0 < x < l,\ t > 0$.

(a) Per definizione la trasformata finita seno di Fourier di $\partial U/\partial x$ è, integrando per parti,

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

o

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\{U\}$$

(b) La trasformata finita coseno di Fourier è

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial x}\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx = U(x,t)\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^l - \frac{n\pi}{l}\int_0^l U(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

o

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\{U\} - \{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}$$

31. Risolvere i problemi 30(a) e (b) per la funzione $\partial^2 U/\partial x^2$.

Sostituendo a U $\partial U/\partial x$ nelle formule del problema 30, si ha

(a)

$$\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\}$$

$$= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_s\{U\} + \frac{n\pi}{l}\{U(0,t) - U(l,t)\cos n\pi\}$$

(b)

$$\mathcal{F}_c\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = -\frac{n\pi}{l}\mathcal{F}_s\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}$$

$$= -\frac{n^2\pi^2}{l^2}\mathcal{F}_c\{U\} - \{U_x(0,t) - U_x(l,t)\cos n\pi\}$$

dove U_x indica la derivata parziale rispetto a x.

32. Usare le trasformate finite di Fourier per risolvere l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U(0,t) = 0,\quad U(4,t) = 0,\quad U(x,0) = 2x$$

dove $0 < x < 4,\ t > 0$.

Si prenda la trasformata finita seno di Fourier (con $l = 4$) di entrambi i membri dell'equazione differenziale a derivate parziali, ottenendo

$$\int_0^4 \frac{\partial U}{\partial t} \sin \frac{n\pi x}{4}\, dx \quad = \quad \int_0^4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \frac{n\pi x}{4}\, dx$$

Scrivendo $u = \mathcal{F}_s\{U\}$ e sfruttando il problema 31(a) con le condizioni $U(0,t) = 0$, $U(4,t) = 0$, si trova

$$\frac{du}{dt} \quad = \quad -\frac{n^2\pi^2}{16} u \qquad (1)$$

dove $u = u(n, t)$.

Prendendo la trasformata finita seno di Fourier della condizione $U(x,0) = 2x$, si ha, come nel problema 10(a),

$$u(n,0) \quad = \quad \mathcal{F}_s\{2x\} \quad = \quad \frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi} \qquad (2)$$

Risolvendo l'equazione differenziale (1), si ha, se c è una costante arbitraria

$$u \quad = \quad u(n,t) \quad = \quad c\, e^{-n^2\pi^2 t/16} \qquad (3)$$

Dato che $c = u(n,0)$, dalla (2) e dalla (3) si ha

$$u \quad = \quad \frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

Quindi per il problema 9(a), l'antitrasformata seno di Fourier è

$$U(x,t) \quad = \quad \frac{2}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{32(1-\cos n\pi)}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

$$= \quad \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) e^{-n^2\pi^2 t/16}$$

Fisicamente, $U(x,t)$ rappresenta la temperatura del punto generico x nell'istante generico t in un solido limitato dai piani $x = 0$ e $x = 4$. Le condizioni $U(0,t) = 0$ e $U(4,t) = 0$ esprimono il fatto che le superfici estreme sono mantenute a temperatura eguale a zero, mentre la condizione $U(x,0) = 2x$ esprime la temperatura iniziale in funzione di x. Il solido può essere sostituito, con risultati equivalenti, da una sbarra avente come asse l'asse x e le estremità in $x = 0$ e $x = 4$ e la superficie laterale isolata.

33. Risolvere l'equazione $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $x > 0$, $t > 0$, con le condizioni

$$U(0,t) = 0, \qquad U(x,0) \quad = \quad \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}, \qquad U(x,t) \text{ è limitata.}$$

Presa la trasformata seno di Fourier di entrambi i lati dell'equazione differenziale a derivate parziali data, si ha

$$\int_0^\infty \frac{\partial U}{\partial t} \sin \lambda x\, dx \quad = \quad \int_0^\infty \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \sin \lambda x\, dx \qquad (1)$$

Allora se $$u \quad = \quad u(\lambda, t) \quad = \quad \int_0^\infty U(x,t) \sin \lambda x\, dx$$

questa diventa $$\frac{du}{dt} \quad = \quad \left\{\frac{\partial U}{\partial x} \sin \lambda x \, - \, \lambda U \cos \lambda x\right\}\Bigg|_0^\infty \, - \, \lambda^2 \int_0^\infty U \sin \lambda x\, dx$$

$$= \quad \lambda\, U(0,t) \, - \, \lambda^2 u \qquad (2)$$

integrando il secondo membro della (1) per parti e assumendo che U e $\partial U/\partial x$ tendano a zero quando $x \to \infty$.

Dalla condizione data per $U(x, 0)$, prendendo la trasformata seno di Fourier si ha

$$u(\lambda, 0) \quad = \quad \int_0^\infty U(x,0) \sin \lambda x\, dx$$

$$= \quad \int_0^1 \sin \lambda x\, dx \quad = \quad \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} \qquad (3)$$

Risolvendo la (2) con la condizione (3) e $U(0,t) = 0$, si ha

$$u(\lambda, t) \quad = \quad \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda^2 t}$$

Prendendo quindi l'antitrasformata seno di Fourier, si trova la soluzione cercata

$$U(x,t) \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda} e^{-\lambda^2 t} \sin \lambda x\, d\lambda$$

Fisicamente, ciò rappresenta la temperatura in un solido con $x > 0$ (v. problema 32).

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

SERIE DI FOURIER, FUNZIONI DISPARI E FUNZIONI PARI, SERIE SENO E COSENO DI FOURIER

34. Tracciare il diagramma di ognuna delle funzioni date e determinare la serie di Fourier corrispondente sfruttando ovunque possibile le proprietà delle funzioni dispari e delle funzioni pari.

(a) $F(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4 \end{cases}$ Periodo 4

(b) $F(x) = \begin{cases} -x & -4 \leqq x \leqq 0 \\ x & 0 \leqq x \leqq 4 \end{cases}$ Periodo 8

(c) $F(x) = 4x,\ 0 < x < 10,$ Periodo 10

(d) $F(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leqq x < 3 \\ 0 & -3 < x < 0 \end{cases}$ Periodo 6

Risp. (a) $\dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$ (c) $20 - \dfrac{40}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$

(b) $2 - \dfrac{8}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos n\pi)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$ (d) $\dfrac{3}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{6(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} - \frac{6\cos n\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right\}$

35. Per ognuno dei casi del problema 34 indicare dove cadono le discontinuità di $F(x)$ e a quale valore convergono le serie in tali punti di discontinuità.

Risp. (a) $x = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots;\ 0$ (c) $x = 0, \pm 10, \pm 20, \ldots;\ 20$

(b) nessuna discontinuità (d) $x = \pm 3, \pm 9, \pm 15, \ldots;\ 3$

36. Sviluppare $F(x) = \begin{cases} 2-x & 0 < x < 4 \\ x-6 & 4 < x < 8 \end{cases}$ in serie di Fourier di periodo 8.

Risp. $\dfrac{16}{\pi^2}\left\{\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{4} + \cdots\right\}$

37. (a) Sviluppare $F(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi,$ in serie seno di Fourier.

(b) Come deve essere definita $F(x)$ in $x = 0$ e $x = \pi$ perché la serie converga a $F(x)$ per $0 \leqq x \leqq \pi$?

Risp. (a) $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n \sin 2nx}{4n^2-1}$ (b) $F(0) = F(\pi) = 0$

38. (*a*) Sviluppare in serie di Fourier $F(x) = \cos x,\ 0 < x < \pi$ con periodo π; e (*b*) confrontare con il risultato del problema 37, dando ragione delle analogie e differenze eventuali.
Risp. La risposta è eguale a quella del problema 37.

39. Sviluppare $F(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$ in serie (*a*) di seni, (*b*) di coseni.

Risp. (*a*) $\frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{8}$ (*b*) $\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cos n\pi/2 - \cos n\pi - 1}{n^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{8}$.

40. Dimostrare che per $0 \leqq x \leqq \pi$,

(*a*) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \cdots\right)$

(*b*) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \cdots\right)$

41. Sfruttare il problema 40 per dimostrare che

(*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$, (*c*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

42. Dimostrare che $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \cdots = \frac{3\pi^2\sqrt{2}}{16}$.

IDENTITA' DI PARSEVAL PER LE SERIE DI FOURIER

43. Sfruttare il problema 40 e l'identità di Parseval per dimostrare che (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

44. Dimostrare che $\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \cdots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$. (*Suggerimento.* Sfruttare il problema 27.)

45. Dimostrare che (*a*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$, (*b*) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$.

46. Dimostrare che $\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2} + \frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2} + \cdots = \frac{4\pi^2 - 39}{16}$.

TRASFORMATE FINITE DI FOURIER

47. Determinare (*a*) la trasformata finita seno e (*b*) coseno di Fourier della funzione $F(x) = 1$ dove $0 < x < l$.
Risp. (*a*) $l(1 - \cos n\pi)/n\pi$ (*b*) 0 se $n = 1, 2, 3, \ldots$; l se $n = 0$

48. Determinare le trasformate finite (*a*) seno e (*b*) coseno di Fourier della funzione $F(x) = x^2$ dove $0 < x < l$.

Risp. (*a*) $\frac{2l^3}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) - \frac{l^3}{n\pi}\cos n\pi$ se $n = 1, 2, 3, \ldots$; $\frac{l^3}{3}$ se $n = 0$ (*b*) $\frac{2l^3}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$

49. Se $\mathcal{F}_s\{F(x)\} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2\pi^2}$ dove $0 < x < \pi$, determinare $F(x)$. *Risp.* $\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - \cos n\pi}{n^2}\right)\sin nx$

50. Se $\mathcal{F}_c\{F(x)\} = \frac{6(\sin n\pi/2 - \cos n\pi)}{(2n+1)\pi}$ per $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $2/\pi$ per $n = 0$ dove $0 < x < 4$, determinare $F(x)$. *Risp.* $\frac{1}{2\pi} + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n\pi/2 - \cos n\pi}{2n+1}\right)\cos\frac{n\pi}{4}$

51. Se $f(n) = \frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}$, determinare (*a*) $\mathcal{F}_s^{-1}\{f(n)\}$ e (*b*) $\mathcal{F}_c^{-1}\{f(n)\}$ se $0 < x < 1$.

Risp. (*a*) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\sin n\pi x$ (*b*) $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n\pi/3)}{(2n+1)^2}\cos n\pi x$

INTEGRALE DI FOURIER E TRASFORMATE DI FOURIER

52. (*a*) Determinare la trasformata di Fourier di $F(x) = \begin{cases} 1/2\epsilon & |x| \leqq \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}$.

(*b*) Determinare il limite di questa trasformata per $\epsilon \to 0+$ e discutere il risultato.

Risp. (*a*) $\frac{\sin\lambda\epsilon}{\lambda\epsilon}$, (*b*) 1

53. (*a*) Determinare la trasformata di Fourier di $F(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

(*b*) Calcolare $\int_0^{\infty}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^3}\right)\cos\frac{x}{2}\,dx$.

Risp. (*a*) $4\left(\frac{\lambda\cos\lambda - \sin\lambda}{\lambda^3}\right)$, (*b*) $\frac{3\pi}{16}$

54. Se $F(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x < 1 \\ 0 & x \geqq 1 \end{cases}$ determinare (*a*) la trasformata seno di Fourier, (*b*) la trasformata coseno di Fourier di $F(x)$. Tracciare in ogni caso il diagramma di $F(x)$ e delle sue trasformate.

Risp. (*a*) $\frac{1 - \cos\lambda}{\lambda}$, (*b*) $\frac{\sin\lambda}{\lambda}$

55. (*a*) Determinare la trasformata seno di Fourier di e^{-x}, $x \geqq 0$.

(*b*) Dimostrare che $\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-m}$, $m > 0$ sfruttando il risultato ottenuto nella parte (*a*).

(*c*) Spiegare dal punto di vista del teorema integrale di Fourier perché il risultato ottenuto in (*b*) non vale per $m = 0$.

Risp. (*a*) $\lambda/(1 + \lambda^2)$

56. Risolvere rispetto a $Y(x)$ l'equazione integrale

$$\int_0^{\infty} Y(x)\sin xt\,dx = \begin{cases} 1 & 0 \leqq t < 1 \\ 2 & 1 \leqq t < 2 \\ 0 & t \geqq 2 \end{cases}$$

e verificare per sostituzione diretta la soluzione ottenuta. *Risp.* $Y(x) = (2 + 2\cos x - 4\cos 2x)/\pi x$

IDENTITA' DI PARSEVAL PER GLI INTEGRALI DI FOURIER

57. Calcolare (*a*) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$, (*b*) $\int_0^{\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^2}$ usando l'identità di Parseval.

[*Suggerimento.* Sfruttare le trasformate seno e coseno di Fourier di e^{-x}, $x > 0$.]

Risp. (*a*) $\pi/4$, (*b*) $\pi/4$

58. Sfruttare il problema 54 per dimostrare che (*a*) $\int_0^{\infty}\left(\frac{1 - \cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$, (*b*) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

59. Dimostrare che $\int_0^{\infty}\frac{(x\cos x - \sin x)^2}{x^6}\,dx = \frac{\pi}{15}$.

PROBLEMI VARI

60. Se $-\pi < x < \pi$ e $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, dimostrare che

$$\frac{\pi}{2}\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha\pi} = \frac{\sin x}{1^2-\alpha^2} - \frac{2\sin 2x}{2^2-\alpha^2} + \frac{3\sin 3x}{3^2-\alpha^2} - \cdots$$

61. Se $-\pi < x < \pi$, dimostrare che

(a) $$\frac{\pi}{2}\frac{\sinh \alpha x}{\sinh \alpha\pi} = \frac{\sin x}{\alpha^2+1^2} - \frac{2\sin 2x}{\alpha^2+2^2} + \frac{3\sin 3x}{\alpha^2+3^2} - \cdots$$

(b) $$\frac{\pi}{2}\frac{\cosh \alpha x}{\sinh \alpha\pi} = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha\cos x}{\alpha^2+1^2} + \frac{\alpha\cos 2x}{\alpha^2+2^2} - \cdots$$

62. (a) Dimostrare che se $\alpha \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, allora

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots$$

(b) Dimostrare che se $0 < \alpha < 1$, allora

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}-x^{-\alpha}}{1+x}\,dx = \frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-2^2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2-3^2} + \cdots$$

(c) Usare le parti (a) e (b) per dimostrare che $\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \alpha\pi}$.

[*Suggerimento*. Per (a) sviluppare $F(x) = \cos \alpha x$, $-\pi \leqq x \leqq \pi$ in serie di Fourier. Per (b) scrivere l'integrale dato come somma di integrali tra 0 e 1 e 1 e ∞, e porre $x = 1/y$ nell'ultimo integrale. Quindi sfruttare il fatto che $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$.]

63. Se $0 < x < \pi$ dimostrare che $\mathcal{F}_s^{-1}\left\{\dfrac{1-\cos n\pi}{n^3}\right\} = \frac{1}{2}x(\pi - x)$.

64. Determinare (a) $\mathcal{F}_s\{\partial^3 U/\partial x^3\}$ e (b) $\mathcal{F}_c\{\partial^3 U/\partial x^3\}$.

65. Dimostrare che

(a) $$\mathcal{F}_s\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_s\{Y(x)\} - \frac{n^3\pi^3}{l^3}\{Y(0) + (-1)^{n+1}Y(l)\} + \frac{n\pi}{l}\{Y''(0) + (-1)^{n+1}Y''(l)\}$$

(b) $$\mathcal{F}_c\{Y^{(iv)}(x)\} = \frac{n^4\pi^4}{l^4}\mathcal{F}_c\{Y(x)\} + \frac{n^2\pi^2}{l^2}\{Y'(0) + (-1)^{n+1}Y'(l)\} - \{Y'''(0) + (-1)^{n+1}Y'''(l)\}.$$

66. (a) Usare le trasformate di Fourier per risolvere le equazioni

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 4,\ t > 0$$

$$U(0,t) = 0, \quad U(4,t) = 0, \quad U(x,0) = 3\sin \pi x - 2\sin 5\pi x$$

(b) Dare un'interpretazione fisica possibile del problema e della soluzione.

Risp. (a) $U(x,t) = 3e^{-2\pi^2 t}\sin \pi x - 2e^{-50\pi^2 t}\sin 5\pi x$

67. Risolvere l'equazione $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 < x < 6$, $t > 0$, con le condizioni

$$U(0,t) = 0, \qquad U(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 3 \\ 0 & 3 < x < 6 \end{cases}$$

e darne una interpretazione fisica.

Risp. $$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\left\{\frac{1-\cos(n\pi/3)}{n\pi}\right\} e^{-n^2\pi^2 t/36}\sin\frac{n\pi x}{6}$$

68. (a) Quale tipo di trasformata (seno o coseno) pensate sia più conveniente usare per risolvere il problema

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 6,\ t > 0$$

$$U_x(0,t) = 0, \qquad U_x(6,t) = 0, \qquad U(x,0) = 2x \ ?$$

Spiegare.

(b) Trovare la soluzione del problema dato in (a).

Risp. (b) $$6 + \frac{24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right)e^{-n^2\pi^2 t/36}\cos\frac{n\pi x}{6}$$

69. Una corda flessibile di lunghezza π è tesa tra i punti $x = 0$ e $x = \pi$ sull'asse x, con le estremità fissate in detti punti. Quando essa è sottoposta ad una vibrazione trasversale piccola, lo spostamento $Y(x,t)$ dall'asse x del generico punto x nell'istante generico t è dato da $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ dove $a^2 = T/\rho$, $T =$ tensione, $\rho =$ massa per unità di lunghezza.

(a) Usando le trasformate finite di Fourier, trovare la soluzione dell'equazione data (detta anche *equazione d'onda*) con $a^2 = 4$ che soddisfi alle condizioni $Y(0,t) = 0$, $Y(\pi,t) = 0$, $Y(x,0) = 0{,}1\sin x + 0{,}01\sin 4x$, $Y_t(x,0) = 0$ per $0 < x < \pi$, $t > 0$.

(b) Interpretare fisicamente le condizioni al contorno date in (a) e la soluzione trovata.

Risp. (a) $Y(x,t) = 0{,}1\sin x\cos 2t + 0{,}01\sin 4x\cos 8t$

70. (a) Risolvere il problema dei valori al contorno $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ con le condizioni $Y(0,t) = 0$, $Y(2,t) = 0$, $Y(x,0) = 0{,}05x(2-x)$, $Y_t(x,0) = 0$, dove $0 < x < 2$, $t > 0$. (b) Darne una interpretazione fisica.

Risp. (a) $$Y(x,t) = \frac{1.6}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

71. Risolvere il problema dei valori al contorno $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0,t) = 1$, $U(\pi,t) = 3$, $U(x,0) = 2$, dove $0 < x < \pi$, $t > 0$.

Risp. $$U(x,t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cos n\pi}{n\pi}e^{-n^2 t}\sin nx$$

72. Dare una interpretazione fisica del problema 71.

73. Risolvere il problema 70 con condizioni al contorno scambiate per $Y(x,0)$ e $Y_t(x,0)$, cioè $Y(x,0) = 0$, $Y_t(x,0) = 0{,}05x(2-x)$, e darne una interpretazione fisica.

Risp. $$Y(x,t) = \frac{3.2}{3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\sin\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

74. Dimostrare le formule (*4*) e (*5*) di pag. 174.

75. Verificare il teorema della convoluzione per le funzioni $F(x) = G(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$.

76. Scrivere l'identità di Parseval in forma complessa usando le formule (*4*) e (*5*) di pag. 174.

77. Dimostrare la formula (*15*) di pag. 176.

78. Dimostrare le formule (*19*) e (*21*) di pagg. 176 e 177.

79. Dimostrare le formule (*23*) o (*24*) di pag. 177.

[*Suggerimento.* Se $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} F(u)\, du$ e $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda v} G(v)\, dv$, allora

$$f(\lambda)\, g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda(u+v)} F(u)\, G(v)\, du\, dv$$

Introdurre ora la trasformazione $u + v = x$.]

80. Se $f(\lambda)$ e $g(\lambda)$ sono le trasformate di Fourier rispettivamente di $F(x)$ e di $G(x)$, dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, \overline{G(x)}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, \overline{g(\lambda)}\, d\alpha$$

dove il tratto sta ad indicare la complessa coniugata.

81. Dimostrare il teorema di Riemann (v. problema 24).

82. (*a*) Mostrare come usare le trasformate di Fourier per risolvere

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad x > 0$$

se $U(0, t) = 0$, $U(x, 0) = e^{-x}$, e $U(x, t)$ è limitata.

(*b*) Darne una interpretazione fisica.

Risp. $U(x, t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda$

83. (*a*) Risolvere $\dfrac{\partial U}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, t) = 0$, $U(x, 0) = e^{-x}$, $x > 0$, $U(x, t)$ è limitata con $x > 0$, $t > 0$.

(*b*) Darne una interpretazione fisica.

Risp. $U(x, t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\lambda e^{-2\lambda^2 t}\sin\lambda x}{\lambda^2 + 1}\, d\lambda$

84. Risolvere $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U_x(0, t) = 0$, $U(x, 0) = \begin{cases} x & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$, $U(x, t)$ è limitata con $x > 0$, $t > 0$.

Risp. $U(x, t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \frac{\cos\lambda - 1}{\lambda^2}\right) e^{-\lambda^2 t}\cos\lambda x\, d\lambda$

85. (*a*) Dimostrare che la soluzione del problema 33 può essere scritta nella forma

$$U(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{(1-x)/2\sqrt{t}}^{(1+x)/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\, dv$$

(*b*) Dimostrare direttamente che la funzione data in (*a*) soddisfa all'equazione $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ e alle condizioni indicate nel problema 33.

CAPITOLO 7

Formula di inversione complessa

LA FORMULA DI INVERSIONE COMPLESSA

Se $f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\}$, allora $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ è data da

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds, \qquad t > 0 \tag{1}$$

e $F(t) = 0$ per $t < 0$. Questa formula è detta *integrale* o *formula di inversione complessa.* Essa è nota anche come *formula integrale di Bromwich*. La formula dà una via diretta per ottenere l'antitrasformata di Laplace di una funzione $f(s)$ data.

L'integrazione indicata nella (*1*) deve essere fatta lungo la retta $s = \gamma$ del piano complesso, dove $s = x + iy$. Il numero reale γ è scelto in modo tale che $s = \gamma$ si trovi alla destra di tutte le singolarità (poli, punti di diramazione o singolarità essenziali), ma per il resto è arbitrario.

IL CONTORNO DI BROMWICH

In pratica l'integrale indicato nella (*1*) viene calcolato prendendo l'integrale di contorno

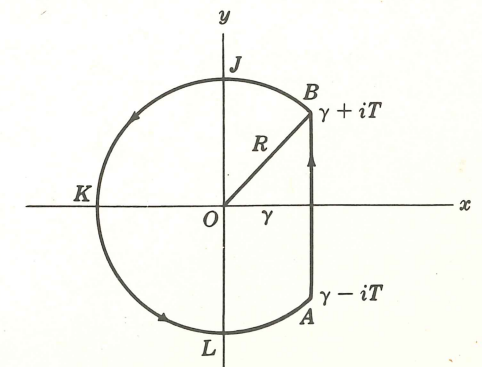
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds \tag{2}$$

dove C è il contorno di fig. 7-1. Questo contorno, detto anche *contorno di Bromwich*, è composto dal segmento di retta AB e dall'arco $BJKLA$ del cerchio di raggio R e centro nell'origine O.

Fig. 7-1

Se si indica l'arco $BJKLA$ con Γ, dalla (*1*) segue che, essendo $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$,

$$F(t) = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} f(s)\, ds \tag{3}$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\, ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{st} f(s)\, ds\right\}$$

USO DEL TEOREMA DEI RESIDUI PER DETERMINARE LE ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

Si supponga che $f(s)$ presenti come singolarità solo poli tutti situati alla sinistra della retta $s = \gamma$ per un dato valore di γ. Si supponga inoltre che l'integrale lungo Γ che figura nella (*3*) tenda a zero per $R \to \infty$. Allora per il teorema dei residui la (*3*) può essere scritta nella forma

$$F(t) = \text{somma dei residui di } e^{st} f(s) \text{ nei poli di } f(s) \quad (4)$$

$$= \sum \text{ dei residui di } e^{st} f(s) \text{ nei poli di } f(s)$$

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PERCHE' L'INTEGRALE LUNGO Γ TENDA A ZERO

La validità della formula (4) è legata al fatto che l'integrale lungo Γ figurante nella (3) tenda a zero per $R \to \infty$. Una condizione sufficiente perché tale ipotesi si verifichi è fornita dal seguente

Teorema 7-1. Se è possibile determinare due costanti $M > 0$, $k > 0$ tali che su Γ (dove $s = Re^{i\theta}$),

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k} \quad (5)$$

allora l'integrale di Γ lungo $e^{st} f(s)$ tende a zero per $R \to \infty$, cioè

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds = 0 \quad (6)$$

La condizione (5) si verifica sempre se $f(s) = P(s)/Q(s)$ con $P(s)$ e $Q(s)$ polinomi tali che il grado di $P(s)$ sia minore del grado di $Q(s)$ (v. problema 15).

La relazione vale anche se $f(s)$ presenta singolarità diverse dai poli.

MODIFICA DEL CONTORNO DI BROMWICH NEL CASO DI PUNTI DI DIRAMAZIONE

Se $f(s)$ presenta punti di diramazione, le relazioni enunciate sopra possono valere egualmente, a condizione di modificare il contorno di Bromwich in maniera adatta. Ad esempio, se $f(s)$ presenta un solo punto di diramazione in $s = 0$, allora si può usare il contorno di fig. 7-2. In detta figura, BDE e LNA rappresentano archi di un cerchio di raggio R e centro nell'origine O, mentre HJK è un arco del cerchio di raggio ϵ e centro in O. Per dettagli sulla determinazione delle antitrasformate di Laplace in casi del genere v. problema 9.

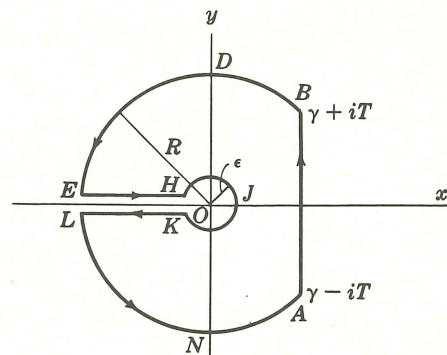



Fig. 7-2

CASO DI UN NUMERO INFINITO DI SINGOLARITA'

Se si vuole trovare l'antitrasformata di Laplace di funzioni che presentano un numero infinito di singolarità isolate, si possono applicare i metodi sopra indicati. In tale caso la porzione curva del contorno di Bromwich è scelta in modo da avere un raggio R_m tale da racchiudere solo un numero finito di singolarità e da non passare per nessuna singolarità. Allora la antitrasformata di Laplace richiesta è determinata prendendo il limite per $m \to \infty$ (v. problemi 13 e 14).

PROBLEMI RISOLTI

LA FORMULA DI INVERSIONE COMPLESSA

1. Dimostrare la validità della formula di inversione complessa.

Per definizione si ha $f(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(u)\, du$. Allora

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} f(s)\, ds = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} \int_0^\infty e^{st-su} F(u)\, du\, ds$$

Posto $s = \gamma + iy$, $ds = i\, dy$, questa diventa

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \int_{-T}^{T} e^{iyt}\, dy \int_0^\infty e^{-iyu} [e^{-\gamma u} F(u)]\, du = \frac{1}{2\pi} e^{\gamma t} \begin{cases} 2\pi e^{-\gamma t} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

per il teorema integrale di Fourier (v. cap. 6). Così si ha

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\, ds \qquad t > 0$$

come volevasi.

Nella dimostrazione si è assunto che $e^{-\gamma u} F(u)$ sia assolutamente integrabile nell'intervallo $(0, \infty)$, cioè che $\int_0^\infty e^{-\gamma u} |F(u)|\, du$ converga, in modo da poter applicare il teorema integrale di Fourier. Perché questa condizione sia assicurata basta che $F(t)$ sia di ordine esponenziale γ dove il numero reale γ è scelto in modo tale che la retta $s = \gamma$ del piano complesso si trovi alla destra di tutte le singolarità di $f(s)$. A parte questa condizione, per il resto γ è del tutto arbitrario.

2. Si indichi con la Γ la parte curva $BJPKQLA$ del contorno di Bromwich (fig. 7-3) di equazione $s = Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0$, cioè sia Γ l'arco di un cerchio di raggio R e centro nell'origine O.
Si assuma che su Γ sia

$$|f(s)| < \frac{M}{R^k}$$

dove $k > 0$ e M sono delle costanti. Dimostrare che

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds = 0$$

Fig. 7-3

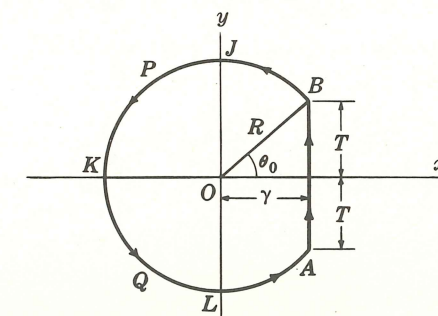
Se $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ e Γ_4 rappresentano gli archi BJ, JPK, KQL e LA rispettivamente, si ha

$$\int_\Gamma e^{st} f(s)\, ds = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_3} e^{st} f(s)\, ds + \int_{\Gamma_4} e^{st} f(s)\, ds$$

A questo punto se si dimostra che tutti gli integrali sulla destra tendono a zero quando $R \to \infty$ il risultato voluto è dimostrato. Per dimostrare ciò si considerino questi quattro integrali.

Caso 1. Integrale lungo Γ_1 o BJ.

Lungo Γ_1 si ha, dato che $s = Re^{i\theta}$, $\theta_0 \leqq \theta \leqq \pi/2$,

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} e^{st} f(s)\, ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\, iRe^{i\theta}\, d\theta$$

Allora
$$|I_1| \leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} |e^{(R\cos\theta)t}|\,|e^{i(R\sin\theta)t}|\,|f(Re^{i\theta})|\,|iRe^{i\theta}|\,d\theta$$
$$\leqq \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\,|f(Re^{i\theta})|\,R\,d\theta$$
$$\leqq \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{(R\cos\theta)t}\,d\theta \quad = \quad \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\phi_0} e^{(R\sin\phi)t}\,d\phi$$

dove si è fatto uso della condizione data $|f(s)| \leqq M/R^k$ su Γ_1 e della trasformazione $\theta = \pi/2 - \phi$ dove $\phi_0 = \pi/2 - \theta_0 = \sin^{-1}(\gamma/R)$.

Dato che $\sin\phi \leqq \sin\phi_0 \leqq \cos\theta_0 = \gamma/R$, quest'ultimo integrale è minore o eguale a
$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\phi_0} e^{\gamma t}\,d\phi \quad = \quad \frac{M\,e^{\gamma t}\,\phi_0}{R^{k-1}} \quad = \quad \frac{M\,e^{\gamma t}}{R^{k-1}}\sin^{-1}\frac{\gamma}{R}$$

Ma quando $R \to \infty$, quest'ultima grandezza tende a zero (come si può vedere osservando ad es. che per valori elevati di R $\sin^{-1}(\gamma/R) \approx \gamma/R$.) Quindi $\lim_{R\to\infty} I_1 = 0$.

Caso 2. Integrale lungo Γ_2 o JPK.

Lungo Γ_2 si ha, dato che $s = Re^{i\theta}$, $\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi$,
$$I_2 \quad = \quad \int_{\Gamma_2} e^{st} f(s)\,ds \quad = \quad \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Re^{i\theta}t} f(Re^{i\theta})\,iRe^{i\theta}\,d\theta$$

Allora, come nel caso 1, si ha
$$|I_2| \quad \leqq \quad \frac{M}{R^{k-1}}\int_{\pi/2}^{\pi} e^{(R\cos\theta)t}\,d\theta \quad \leqq \quad \frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-(R\sin\phi)t}\,d\phi$$

avendo posto $\theta = \pi/2 + \phi$.

Ora $\sin\phi \geqq 2\phi/\pi$ per $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$ (v. problema 3), per cui l'ultimo integrale è minore o eguale a
$$\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi t/\pi}\,d\phi \quad = \quad \frac{\pi M}{2tR^k}(1 - e^{-Rt})$$

che tende a zero per $R \to \infty$. Quindi $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$.

Caso 3. Integrale lungo Γ_3 o KQL.

Questo caso può essere trattato in maniera analoga al caso 2 [v. problema 58(*a*)].

Caso 4. Integrale lungo Γ_4 o LA.

Questo caso può essere trattato in maniera analoga al caso 1 [v. problema 58(*b*)].

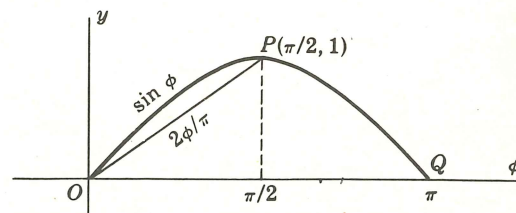
3. Dimostrare che $\sin\phi \geqq 2\phi/\pi$ per $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$.

Procedimento 1. Dimostrazione geometrica.

Dalla fig. 7-4, dove la linea OPQ rappresenta un arco del diagramma di $y = \sin\phi$ e $y = 2\phi/\pi$ rappresenta la retta OP, è geometricamente evidente che $\sin\phi \geqq 2\phi/\pi$ per $0 \leqq \phi \leqq \pi/2$.

Fig. 7-4

Procedimento 2. Dimostrazione analitica.

Si consideri $F(\phi) = \dfrac{\sin\phi}{\phi}$. Si ha
$$\frac{dF}{d\phi} \quad = \quad F'(\phi) \quad = \quad \frac{\phi\cos\phi - \sin\phi}{\phi^2} \qquad (1)$$

Se $G(\phi) = \phi\cos\phi - \sin\phi$, allora
$$\frac{dG}{d\phi} \quad = \quad G'(\phi) \quad = \quad -\phi\sin\phi \qquad (2)$$

Quindi per $0 \leqq \phi < \pi/2$, $G'(\phi) \leqq 0$ e $G(\phi)$ è una funzione decrescente. Dato che $G(0) = 0$, ne segue che $G(\phi) \leqq 0$. Allora dalla (*1*) si vede che $F'(\phi) \leqq 0$, o $F(\phi)$ è una funzione decrescente. Definendo $F(0) = \lim_{\phi\to 0} F(\phi) = 1$, si vede che $F(\phi)$ decresce da 1 a $2/\pi$ mentre ϕ va da 0 a $\pi/2$. Quindi
$$1 \quad \geqq \quad \frac{\sin\phi}{\phi} \quad \geqq \quad \frac{2}{\pi}$$

da cui segue il risultato cercato.

USO DEL TEOREMA DEI RESIDUI PER DETERMINARE LE ANTITRASFORMATE DI LAPLACE

4. Si supponga che la funzione $f(s)$ presenti come uniche singolarità dei poli situati tutti alla sinistra della retta $s = \gamma$ per una qualche costante reale γ. Si supponga inoltre che $f(s)$ soddisfi alla condizione indicata nel problema 2. Dimostrare che l'antitrasformata di Laplace di $f(s)$ è data da $F(t)$ = somma dei residui di $e^{st} f(s)$ in tutti i poli di $f(s)$.

Si ha
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\,ds \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\,ds \; + \; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{st} f(s)\,ds$$

dove C è il contorno di Bromwich del problema 2 e Γ è l'arco di cerchio $BJPKQLA$ di fig. 7-3. Per il teorema dei residui,
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{st} f(s)\,ds \quad = \quad \text{somma dei residui di } e^{st} f(s) \text{ in tutti i poli di } f(s) \text{ interni a } C$$
$$= \quad \sum \text{ residui interni a } C$$

Quindi
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{st} f(s)\,ds \quad = \quad \sum \text{ residui interni a } C \; - \; \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} e^{st} f(s)\,ds$$

Prendendo il limite per $R \to \infty$, per il problema 2 si ha
$$F(t) \quad = \quad \text{somma dei residui di } e^{st} f(s) \text{ in tutti i poli di } f(s)$$

5. (*a*) Dimostrare che $f(s) = \dfrac{1}{s-2}$ soddisfa alla condizione del problema 2.

(*b*) Determinare il residuo di $\dfrac{e^{st}}{s-2}$ nel polo $s = 2$.

(*c*) Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}$ usando la formula di inversione complessa.

(*a*) Per $s = Re^{i\theta}$, si ha
$$\left|\frac{1}{s-2}\right| \quad = \quad \left|\frac{1}{Re^{i\theta}-2}\right| \quad \leqq \quad \frac{1}{|Re^{i\theta}| - 2} \quad = \quad \frac{1}{R-2} \quad < \quad \frac{2}{R}$$

per R abbastanza grande (ad es. $R > 4$). Quindi la condizione del problema 2 è soddisfatta quando $k = 1$, $M = 2$. Si noti che nella dimostrazione seguita si è fatto uso della formula $|z_1 - z_2| \geqq |z_1| - |z_2|$ [v. problema 49(*c*), pag. 167].

(*b*) Il residuo nel polo semplice $s = 2$ è

$$\lim_{s \to 2} (s-2)\left(\frac{e^{st}}{s-2}\right) = e^{2t}$$

(*c*) Per il problema 4 e i risultati delle parti (*a*) e (*b*), si vede che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = \text{somma dei residui di } e^{st} f(s) = e^{2t}$$

Si noti che il contorno di Bromwich in questo caso è scelto in modo tale che γ sia un qualsiasi numero reale maggiore di 2 e che il contorno racchiuda il polo $s = 2$.

6. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$ usando il metodo dei residui.

Dato che la funzione di cui si cerca l'antitrasformata di Laplace soddisfa alla condizione (*5*) del teorema di pag. 202 (il che può essere dimostrato sia direttamente come nel problema 5 sia usando il problema 15 di pag. 212), si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st}\,ds}{(s+1)(s-2)^2}$$

$$= \sum \text{residui di } \frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2} \text{ nei poli } s = -1 \text{ e } s = 2$$

Ora il residuo nel polo semplice $s = -1$ è

$$\lim_{s \to -1} (s+1)\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \frac{1}{9}e^{-t}$$

e il residuo nel polo doppio $s = 2$ è

$$\lim_{s \to 2} \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-2)^2\left\{\frac{e^{st}}{(s+1)(s-2)^2}\right\}\right] = \lim_{s \to 2}\frac{d}{ds}\left[\frac{e^{st}}{s+1}\right]$$

$$= \lim_{s \to 2}\frac{(s+1)te^{st} - e^{st}}{(s+1)^2} = \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

Allora $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\} = \sum \text{residui} = \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{3}te^{2t} - \frac{1}{9}e^{2t}$$

7. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\}$

Come nel problema 6, l'antitrasformata richiesta è la somma dei residui di

$$\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}$$

nei poli $s = -1$ e $s = 1$ che sono rispettivamente di ordine tre e due.

Ora il residuo in $s = -1$ è

$$\lim_{s \to -1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\left[(s+1)^3\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s \to -1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{se^{st}}{(s-1)^2}\right] = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2)$$

e il residuo in $s = 1$ è

$$\lim_{s \to 1}\frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(s-1)^2\frac{se^{st}}{(s+1)^3(s-1)^2}\right] = \lim_{s \to 1}\frac{d}{ds}\left[\frac{se^{st}}{(s+1)^3}\right] = \frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

Allora $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^3(s-1)^2}\right\} = \sum \text{residui} = \frac{1}{16}e^{-t}(1-2t^2) + \frac{1}{16}e^{t}(2t-1)$$

8. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$.

Si ha $$\frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{[(s+i)(s-i)]^2} = \frac{1}{(s+i)^2(s-i)^2}$$

L'antitrasformata richiesta è la somma dei residui di

$$\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}$$

nei poli $s = i$ e $s = -i$ che sono entrambi di ordine due.

Il residuo in $s = i$ è

$$\lim_{s \to i}\frac{d}{ds}\left[(s-i)^2\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{it} - \frac{1}{4}ie^{it}$$

e il residuo in $s = -i$ è

$$\lim_{s \to -i}\frac{d}{ds}\left[(s+i)^2\frac{e^{st}}{(s+i)^2(s-i)^2}\right] = -\frac{1}{4}te^{-it} + \frac{1}{4}ie^{-it}$$

che può essere anche dedotto dal residuo in i sostituendo $-i$ a i. Allora

$$\sum \text{residui} = -\frac{1}{4}t(e^{it} + e^{-it}) - \frac{1}{4}i(e^{it} - e^{-it})$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}\sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$$

Confrontare con il problema 18, pag. 54.

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE DI FUNZIONI CON PUNTI DI DIRAMAZIONE

9. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right\}$ usando la formula di inversione complessa.

Per la formula di inversione complessa, l'antitrasformata di Laplace richiesta è data da

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - a\sqrt{s}}}{s}\,ds \qquad (1)$$

Dato che $s = 0$ è un punto di diramazione dell'integrando, si consideri

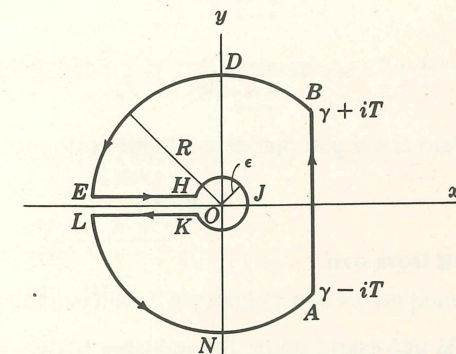



Fig. 7-5

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{BDE}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{LNA}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$

dove C è il contorno di fig. 7-5 formato dal segmento AB $(s = \gamma)$, dagli archi BDE e LNA di un cerchio di raggio R e centro nell'origine O e dall'arco HJK di un cerchio di raggio ϵ e centro in O.

Dato che l'unica singolarità $s = 0$ dell'integrando non è interna a C, l'integrale di sinistra per il teorema di Cauchy è nullo. Inoltre l'integrando soddisfa alla condizione del problema 2 (v. problema 61) per cui prendendo il limite per $R \to \infty$ gli integrali lungo BDE e LNA tendono a zero. Ne segue che

$$F(t) = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds + \int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds\right\} \qquad (2)$$

Lungo EH, $s = xe^{\pi i}$, $\sqrt{s} = \sqrt{x}\,e^{\pi i/2} = i\sqrt{x}$ e quando s va da $-R$ a $-\epsilon$, x va da R a ϵ. Per cui si ha

$$\int_{EH}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{-R}^{-\epsilon}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{R}^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

Analogamente, lungo KL, $s = xe^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = \sqrt{x}\,e^{-\pi i/2} = -i\sqrt{x}$ e quando s va da $-\epsilon$ a $-R$, x va da ϵ a R. Allora

$$\int_{KL}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{-\epsilon}^{-R}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}\,dx$$

Lungo HJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ e si ha

$$\int_{HJK}\frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s}\,ds = \int_{\pi}^{-\pi}\frac{e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}}{\epsilon e^{i\theta}}\,i\epsilon e^{i\theta}\,d\theta$$

$$= i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta$$

Così la (2) diventa

$$F(t) = -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{R}^{\epsilon}\frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x}\,dx + \int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt}(e^{ai\sqrt{x}} - e^{-ai\sqrt{x}})}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

$$= -\lim_{\substack{R\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{2i\int_{\epsilon}^{R}\frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx + i\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta\right\}$$

Dato che si può prendere il limite sotto segno di integrale, si ha

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon e^{i\theta}t - a\sqrt{\epsilon}\,e^{i\theta/2}}\,d\theta = \int_{\pi}^{-\pi} 1\,d\theta = -2\pi$$

e si trova così

$$F(t) = 1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx \qquad (3)$$

Ciò può essere scritto (v. problema 10) come

$$F(t) = 1 - \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t}) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) \qquad (4)$$

10. Dimostrare che $\displaystyle \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\sin a\sqrt{x}}{x}\,dx = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$ e dimostrare così la formula finale (4) del problema 9.

Posto $x = u^2$, l'integrale richiesto diventa

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2t}\sin au}{u}\,du$$

Derivando rispetto ad a e sfruttando il problema 183, pag. 41,

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u^2t}\cos au\,du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-a^2/4t}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$$

Quindi, sfruttando il fatto che $I = 0$ quando $a = 0$,

$$I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-p^2/4t}\,dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du = \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$$

e la formula cercata è dimostrata.

11. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$.

Se $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, allora si ha $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\,f(s) - F(0) = s\,f(s)$ se $F(0) = 0$. Così se $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ e $F(0) = 0$, allora $\mathcal{L}^{-1}\{s\,f(s)\} = F'(t)$.

Per i problemi 9 e 10 si ha

$$F(t) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du$$

per cui $F(0) = 0$ e

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$$

Ne deriva che

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = F'(t) = \frac{d}{dt}\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{\pi}}\,t^{-3/2}\,e^{-a^2/4t}$$

ANTITRASFORMATE DI LAPLACE DI FUNZIONI CON UN NUMERO INFINITO DI SINGOLARITA'

12. Determinare tutte le singolarità di $\displaystyle f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}}$ dove $0 < x < 1$.

A causa della presenza di $\sqrt{s}$, potrebbe sembrare che $s = 0$ sia un punto di diramazione. Che non sia così, lo si può invece vedere osservando che

$$f(s) = \frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh\sqrt{s}} = \frac{1 + (x\sqrt{s})^2/2! + (x\sqrt{s})^4/4! + \cdots}{s\{1 + (\sqrt{s})^2/2! + (\sqrt{s})^4/4! + \cdots\}}$$

$$= \frac{1 + x^2s/2! + x^4s^2/4! + \cdots}{s\{1 + s/2! + s^2/4! + \cdots\}}$$

da cui risulta evidente che in $s = 0$ non c'è un punto di diramazione. Tuttavia in $s = 0$ c'è un polo semplice.

La funzione $f(s)$ ha inoltre un numero infinito di poli dati dalle radici dell'equazione

$$\cosh\sqrt{s} = \frac{e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}}{2} = 0$$

Queste si hanno dove $e^{2\sqrt{s}} = -1 = e^{\pi i + 2k\pi i}$ $\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

da cui $\sqrt{s} = (k + \frac{1}{2})\pi i \quad$ o $\quad s = -(k + \frac{1}{2})^2\pi^2$

Questi sono poli semplici (v. problema 56).

Quindi $f(s)$ presenta poli semplici in

$s = 0$ e $s = s_n$ dove $s_n = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

13. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\}$ dove $0 < x < 1$.

L'antitrasformata richiesta può essere determinata usando il contorno di Bromwich di fig. 7-6. Il segmento AB è scelto in modo che si trovi alla destra di tutti i poli che, come si è visto nel problema 12, sono dati da

$s = 0$ e $s = s_n = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$

Si è scelto il contorno di Bromwich in modo che la parte curva $BDEFGHA$ sia un arco del cerchio Γ_m con centro nell'origine e raggio

$$R_m = m^2\pi^2$$

dove m è un numero intero positivo. Questa scelta assicura che il contorno non passa per nessun polo.

Fig. 7-6

Si determinano ora i residui di

$$\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}$$

nei poli. Si ha:

Residuo in $s = 0$: $\quad \lim_{s \to 0} (s - 0) \left\{\dfrac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\} = 1$

Residuo in $s = -(n - \frac{1}{2})^2\pi^2, \ n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\lim_{s \to s_n} (s - s_n) \left\{\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\} = \lim_{s \to s_n} \left\{\frac{s - s_n}{\cosh \sqrt{s}}\right\} \lim_{s \to s_n} \left\{\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s}\right\}$$

$$= \lim_{s \to s_n} \left\{\frac{1}{(\sinh \sqrt{s})(1/2\sqrt{s})}\right\} \lim_{s \to s_n} \left\{\frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s}\right\}$$

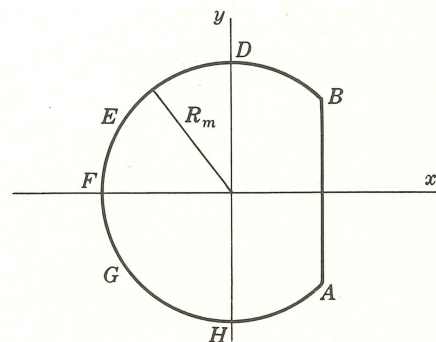
$$= \frac{4(-1)^n}{\pi(2n-1)} e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cos (n - \tfrac{1}{2})\pi x$$

Se C_m è il contorno di fig. 7-6, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_m} \frac{e^{st} \cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\, ds = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cos (n - \tfrac{1}{2})\pi x$$

Prendendo il limite per $m \to \infty$ ed osservando che l'integrale lungo Γ_m tende a zero (v. problema 54), si ha

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(n-\frac{1}{2})^2\pi^2 t} \cos (n - \tfrac{1}{2})\pi x$$

$$= 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

14. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}\right\}$ dove $0 < x < a$.

La funzione $f(s) = \dfrac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$ presenta dei poli in $s = 0$ e per i valori di s per cui $\cosh sa = 0$, cioè

$$s = s_k = (k + \tfrac{1}{2})\pi i/a \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

A causa della presenza di s^2 sembrerebbe che $s = 0$ sia un polo di ordine due. Tuttavia, osservando che in prossimità di $s = 0$,

$$\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} = \frac{sx + (sx)^3/3! + (sx)^5/5! + \cdots}{s^2\{1 + (sa)^2/2! + (sa)^4/4! + \cdots\}}$$

$$= \frac{x + s^2x^3/3! + s^4x^5/5!}{s\{1 + s^2a^2/2! + s^4a^4/4! + \cdots\}}$$

si vede che $s = 0$ è un polo di ordine uno, cioè un polo semplice. I poli s_k sono anch'essi poli semplici (v. problema 56).

Procedendo come nel problema 13, si ottengono i residui di $e^{st} f(s)$ in questi poli.

Il residuo in $s = 0$ è

$$\lim_{s \to 0} (s - 0) \left\{\frac{e^{st} \sinh sx}{s^2 \cosh sa}\right\} = \left\{\lim_{s \to 0} \frac{\sinh sx}{s}\right\} \left\{\lim_{s \to 0} \frac{e^{st}}{\cosh sa}\right\} = x$$

usando la regola di L'Hospital.

Il residuo in $s = s_k$ è

$$\lim_{s \to s_k} (s - s_k) \left\{\frac{e^{st} \sinh sx}{s^2 \cosh sa}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{\cosh sa}\right\} \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{1}{a \sinh sa}\right\} \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{e^{st} \sinh sx}{s^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{ai \sin (k + \frac{1}{2})\pi} \cdot \frac{e^{(k+\frac{1}{2})\pi i t/a}\, i \sin (k + \frac{1}{2})\pi x/a}{-(k + \frac{1}{2})^2\pi^2/a^2}$$

$$= -\frac{a(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi i t/a} \sin (k + \frac{1}{2})\pi x/a}{\pi^2(k + \frac{1}{2})^2}$$

Con una opportuna procedura per determinare il limite, analoga a quella usata nel problema 13, sommando i residui si arriva al risultato richiesto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}\right\} = x - \frac{a}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{(k+\frac{1}{2})\pi i t/a} \sin (k + \frac{1}{2})\pi x/a}{(k + \frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos (n - \frac{1}{2})\pi t/a \sin (n - \frac{1}{2})\pi x/a}{(n - \frac{1}{2})^2}$$

$$= x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

PROBLEMI VARI

15. Sia $f(s) = P(s)/Q(s)$ dove $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi tali che $P(s)$ sia di grado inferiore a $Q(s)$. Dimostrare che $f(s)$ soddisfa alla condizione indicata nel problema 2.

Sia
$$P(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m$$
$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n$$
dove $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ e $0 \leqq m < n$. Allora se $s = Re^{i\theta}$, si ha

$$|f(s)| = \left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right| = \left|\frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n}\right|$$
$$= \left|\frac{a_0 R^m e^{mi\theta} + a_1 R^{m-1} e^{(m-1)i\theta} + \cdots + a_m}{b_0 R^n e^{ni\theta} + b_1 R^{n-1} e^{(n-1)i\theta} + \cdots + a_n}\right|$$
$$= \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \frac{1}{R^{n-m}} \left|\frac{1 + (a_1/a_0R)e^{-i\theta} + (a_2/a_0R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (a_m/a_0R^m)e^{-ni\theta}}{1 + (b_1/b_0R)e^{-i\theta} + (b_2/b_0R^2)e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0R^n)e^{-ni\theta}}\right|$$

Si indichi con A il massimo tra $|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \ldots, |a_m/a_0|$.

Si indichi con B il massimo tra $|b_1/b_0|, |b_2/b_0|, \ldots, |b_n/b_0|$.

Allora

$$\left|1 + \frac{a_1}{a_0R}e^{-i\theta} + \frac{a_2}{a_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{a_m}{a_0R^m}e^{-mi\theta}\right| \leqq 1 + \frac{A}{R} + \frac{A}{R^2} + \cdots + \frac{A}{R^m}$$
$$\leqq 1 + \frac{A}{R}\left(1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$
$$\leqq 1 + \frac{A}{R-1} < 2$$
per $R > A + 1$.

Inoltre
$$\left|1 + \frac{b_1}{b_0R}e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0R^n}e^{-ni\theta}\right|$$
$$\geqq 1 - \left|\frac{b_1}{b_0R}e^{-i\theta} + \frac{b_2}{b_0R^2}e^{-2i\theta} + \cdots + \frac{b_n}{b_0R^n}e^{-ni\theta}\right|$$
$$\geqq 1 - \left(\frac{B}{R} + \frac{B}{R^2} + \cdots + \frac{B}{R^n}\right)$$
$$\geqq 1 - \frac{B}{R}\left(1 + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} + \cdots\right)$$
$$\geqq 1 - \frac{B}{R-1} \geqq \frac{1}{2}$$
per $R > 2B + 1$.

Quindi per R maggiore di uno dei due valori $A + 1$ o $2B + 1$, si ha
$$|f(s)| \leqq \left|\frac{a_0}{b_0}\right| \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \cdot \frac{1}{1/2} \leqq \frac{M}{R^k}$$
dove M è una qualsiasi costante maggiore di $2|a_0/b_0|$ e $k = n - m \geqq 1$. Ciò dimostra quanto richiesto.

16. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}\right\}$ dove $0 < x < a$.

(*a*) **Procedimento 1.** Dal problema 13 si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh \sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Sostituendo s con ks, per la proprietà del cambio di scala, pag. 44, si ha
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{ks}}{ks \cosh \sqrt{ks}}\right\} = \frac{1}{k}\left\{1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4k} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right\}$$

Moltiplicando quindi entrambi i membri per k, sostituendo k con a^2 e x con x/a, si ottiene il risultato voluto
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}\right\} = 1 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$$

(*b*) **Procedimento 2.** Si può anche usare direttamente la formula di inversione come si è fatto nel problema 13.

17. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sb}\right\}$ dove $0 < x < b$.

Sia $f(s) = \dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sb}$. Allora $s = 0$ è un polo di ordine 3, mentre $s = s_k = (2k+1)\pi i/2b$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ (che sono radici di $sb = 0$), sono poli semplici. Procedendo come nel problema 13, si ha:

Il residuo di $e^{st}f(s)$ in $s = s_k$ è
$$\lim_{s \to s_k} (s - s_k)\left\{\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3 \cosh sb}\right\}$$
$$= \left\{\lim_{s \to s_k} \frac{s - s_k}{\cosh sb}\right\}\left\{\lim_{s \to s_k} \frac{e^{st}\cosh sx}{s^3}\right\}$$
$$= \frac{1}{b \sinh (2k+1)\pi i/2} \cdot \frac{e^{(2k+1)\pi it/2b}\cosh (2k+1)\pi ix/2b}{\{(2k+1)\pi i/2b\}^3}$$
$$= \frac{(-1)^k 8b^2 e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)\pi^3} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}$$

Per trovare il residuo in $s = 0$, si scrive
$$\frac{e^{st}\cosh sx}{s^3 \cosh sb} = \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left\{\frac{1 + s^2x^2/2! + s^4x^4/4! + \cdots}{1 + s^2b^2/2! + s^4b^4/4! + \cdots}\right\}$$
$$= \frac{1}{s^3}\left(1 + st + \frac{s^2t^2}{2!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{s^2x^2}{2!} + \frac{s^4x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{s^2b^2}{2} + \frac{5s^4b^4}{24} - \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{s^3}\left\{1 + st + \frac{s^2t^2}{2} + \frac{s^2x^2}{2} - \frac{s^2b^2}{2} + \cdots\right\}$$

Quindi il residuo (che è il coefficiente di $1/s$ nella serie) è $\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2)$.

Il residuo in $s = 0$ può essere determinato anche calcolando
$$\lim_{s \to 0} \frac{1}{2!}\frac{d^3}{ds^3}\left\{(s-0)^3 \frac{e^{st}\cosh sx}{s^3 \cosh sb}\right\}$$

L'antitrasformata di Laplace cercata è la somma dei residui sopra determinati ed è
$$\tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) + \frac{8b^2}{\pi^3}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{(2k+1)\pi it/2b}}{(2k+1)^3} \cos\frac{(2k+1)\pi x}{2b}$$
$$= \tfrac{1}{2}(t^2 + x^2 - b^2) - \frac{16b^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos\frac{(2n-1)\pi t}{2b} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2b}$$

che corrisponde al caso 123 della tabella di pag. 252.

18. Al circuito elettrico di fig. 7-8 è applicata una tensione periodica $E(t)$ avente l'andamento di un' "onda quadra" come indicato in fig. 7-7. Determinare la corrente in funzione del tempo, supponendo che essa sia nulla nell'istante $t = 0$.

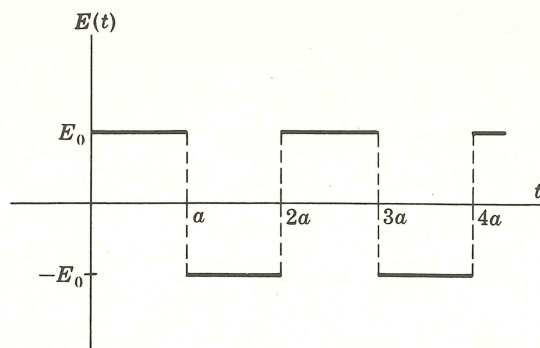
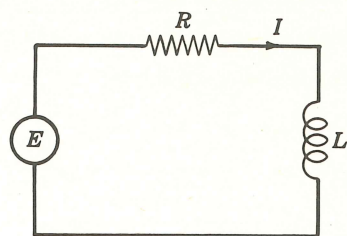



Fig. 7-7 Fig. 7-8

L'equazione differenziale della corrente $I(t)$ nel circuito è

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \qquad \text{dove} \qquad I(0) = 0 \tag{1}$$

Prendendo le trasformate di Laplace, usando il caso 135 della tabella di pag. 253, si ha

$$Ls\tilde{I} + R\tilde{I} = \frac{E_0}{s}\tanh\frac{as}{2} \qquad \text{o} \qquad \tilde{I}(s) = \frac{E_0}{s(Ls+R)}\tanh\frac{as}{2}$$

dove $\tilde{I}(s) = \mathcal{L}\{I(t)\}$. Quindi

$$I(t) = \frac{E_0}{L}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\} \tag{2}$$

La funzione $f(s) = \dfrac{1}{s(s+R/L)}\tanh\dfrac{as}{2}$ presenta un polo semplice in $s = -R/L$ e poli semplici in $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ dove $\cosh(as/2) = 0$ (confrontare con il problema 17). Il valore $s = 0$ non è un polo dato che $\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\tanh(as/2)}{s} = \dfrac{a}{2}$ è finito. Quindi $s = 0$ è una singolarità eliminabile.

Procedendo come nei problemi 13 e 17, si ottengono i residui di $e^{st}f(s)$ nei poli. Si ha:

Il residuo in $s = -R/L$ è

$$\lim_{s\to -R/L}(s+R/L)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\} = \frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L}$$

Il residuo in $s = s_k = (2k+1)\pi i/a$ è

$$\lim_{s\to s_k}(s-s_k)\left\{\frac{e^{st}}{s(s+R/L)}\tanh\frac{as}{2}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_k}\frac{s-s_k}{\cosh(as/2)}\right\}\left\{\lim_{s\to s_k}\frac{e^{st}\sinh(as/2)}{s(s+R/L)}\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{(a/2)\sinh(as_k/2)}\right\}\left\{\frac{e^{s_k t}\sinh(as_k/2)}{s_k(s_k+R/L)}\right\}$$

$$= \frac{2e^{(2k+1)\pi i t/a}}{(2k+1)\pi i\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

Allora la somma dei residui è

$$\frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2e^{(2k+1)\pi i t/a}}{(2k+1)\pi i\{(2k+1)\pi i/a + R/L\}}$$

$$= \frac{L}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{aR\sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

Quindi dalla (2) si ha il risultato cercato

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{aR\sin(2n-1)\pi t/a - (2n-1)\pi L\cos(2n-1)\pi t/a}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}}$$

Questo può essere posto nella forma

$$I(t) = \frac{E_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\frac{aR}{2L} + \frac{2E_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\{(2n-1)\pi t/a - \phi_n\}}{(2n-1)\{a^2R^2 + (2n-1)^2\pi^2L^2\}^{1/2}}$$

dove $\phi_n = \tan^{-1}\{(2n-1)\pi L/aR\}$.

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

LA FORMULA DI INVERSIONE COMPLESSA E USO DEL TEOREMA DEI RESIDUI

19. Usare la formula di inversione complessa per calcolare

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\}$ (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+a^2}\right\}$ (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$

Risp. (a) $\cos at$, (b) $(\sin at)/a$, (c) $\frac{1}{2}(\sin t - \cos t + e^{-t})$

20. Determinare l'antitrasformata di Laplace delle seguenti funzioni usando la formula di inversione complessa: (a) $1/(s+1)^2$, (b) $1/s^3(s^2+1)$.

Risp. (a) te^{-t}, (b) $\frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$

21. (a) Dimostrare che $f(s) = \dfrac{1}{s^2-3s+2}$ soddisfa alle condizioni della formula di inversione. (b) Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$.

Risp. (b) $e^{2t} - e^t$

22. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}\right\}$ giustificando i vari passaggi.

Risp. $\frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t\cos 2t$

23. (a) Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^3}\right\}$ giustificando i vari passaggi e (b) verificare il risultato trovato.

24. (a) Calcolare $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{se^{st}}{(s^2-1)^2}\,ds$ lungo il percorso C in fig. 7-9 dove $R \geqq 3$ e $\gamma > 1$. (b) Dare una interpretazione della risposta trovata per quanto si riferisce alla teoria delle trasformate di Laplace.

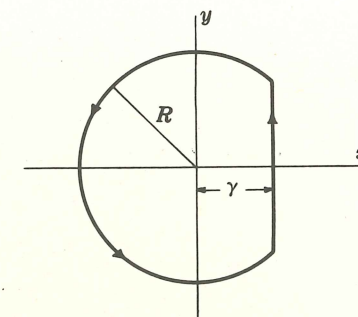



Fig. 7-9

25. Usare la formula di inversione per calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+a)(s-b)^2}\right\}$ dove a e b sono costanti positive qualsiasi.

26. Usare la formula di inversione per risolvere: (*a*) il problema 13, pag. 53; (*b*) il problema 25, pag. 58; (*c*) il problema 28, pag. 60; (*d*) il problema 110, pag. 74.

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE DI FUNZIONI CON PUNTI DI DIRAMAZIONE

27. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$ usando la formula di inversione complessa.

28. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}\right\}$ usando la formula di inversione.

29. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\sqrt{s+1}}\right\} = \operatorname{erf}\sqrt{t}$ usando la formula di inversione.

30. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{s}}{s-1}\right\}$ usando la formula di inversione complessa.

31. (*a*) Usare la formula di inversione complessa per calcolare $\mathcal{L}^{-1}\{s^{-1/3}\}$ e (*b*) verificare il risultato con un altro procedimento.

32. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s)\}$ usando la formula di inversione. *Risp.* $(1-e^{-t})/t$

33. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\{\ln(1+1/s^2)\}$ con la formula di inversione. *Risp.* $2(1-\cos t)/t$

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE DI FUNZIONI CON UN NUMERO INFINITO DI SINGOLARITA'

34. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(e^s+1)}\right\}$ usando la formula di inversione complessa.

35. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\cosh s}\right\} = 1 - \frac{4}{\pi}\left\{\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi t}{2} - \cdots\right\}.$

36. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\sinh s}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(1-\cos n\pi t)$

37. Usando la formula di inversione complessa, dimostrare che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3\sinh as}\right\} = \frac{t(t^2-a^2)}{6a} - \frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi t}{a}$$

38. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\omega^2)(1+e^{-2as})}\right\} = \frac{\sin\omega(t+a)}{2\omega} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi t/2a}{\omega^2-(2n-1)^2\pi^2/4a^2}.$

PROBLEMI VARI

39. Calcolare (*a*) $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s-1)^4\}$, (*b*) $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-2s}/(s-1)^4\}$, usando la formula di inversione complessa.

40. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}$ usando l'integrazione al contorno. *Risp.* $t\cos t$

41. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^4}\right\}$. *Risp.* $\frac{1}{48}\{3t^2\cos t + (t^3-3t)\sin t\}$

42. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s-1}{s(s-1)^2(s+1)}\right\}$ con la formula di inversione complessa e verificare il risultato con un altro procedimento.

43. (*a*) Dimostrare che la funzione $f(s) = \frac{1}{s^2\cosh s}$ soddisfa alle condizioni del *teorema 7-1*, pag. 202.

(*b*) Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2\cosh s}\right\} = t + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi t.$

44. Discutere la relazione esistente tra i risultati dei problemi 43(*b*) e 35.

45. Calcolare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4+4}\right\}$ con la formula di inversione, giustificando i singoli passaggi.

Risp. $\frac{1}{4}(\sin t\cosh t - \cos t\sinh t)$

46. (*a*) Dimostrare che se $x > 0$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s e^{-x\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\right\} = e^{-x\sqrt{\omega/2}}\cos(\omega t - x\sqrt{\omega/2}) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u e^{-ut}\sin x\sqrt{u}}{u^2+\omega^2}\,du$$

(*b*) Dimostrare che per grandi valori di t l'integrale che figura nella parte (*a*) può essere trascurato.

47. Dimostrare che per $0 < x < 1$, $\frac{\sinh sx}{s^2\cosh s} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{s^2+(2n-1)\pi^2/4}.$

48. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{csch}^2 s}{s}\right\}.$

49. Dimostrare che per $0 < x < 1$, $\frac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh\sqrt{s}} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(2n-1)\pi x/2}{s+(2n-1)^2\pi^2/4}.$

50. Dimostrare che

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(1+1/s^2)}{1+e^{-2as}}\right\} = \frac{1-\cos(t+a)}{t+a} + \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{4a^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$$

51. Dimostrare che per $0 < x < a$,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sinh\sqrt{s}(a-x)}{\sinh\sqrt{s}\,a}\right\} = \frac{a-x}{a} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t/a^2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{a}$$

52. Usare la formula di inversione per risolvere: (*a*) il problema 3(*g*), pag. 48; (*b*) il problema 9(*a*), pag. 51; (*c*) il problema 14, pag. 53.

53. Usare la formula di inversione per risolvere l'equazione $Y^{(iv)}(t) - a^4Y(t) = \sin at + e^{-at}$ con la condizione $Y(0) = 2,\ Y'(0) = 0,\ Y''(0) = -1,\ Y'''(0) = 0$.

54. Dimostrare che l'integrale lungo Γ del problema 13 tende a zero per $R \to \infty$.

55. Usare la formula di inversione complessa per dimostrare: (*a*) il *teorema 2-3*, pag. 43; (*b*) il *teorema 2-5*, pag. 44; (*c*) il *teorema 2-10*, pag. 45.

56. Dimostrare che i poli determinati (*a*) nel problema 12 e (*b*) nel problema 14 sono poli semplici. [*Suggerimento.* Sfruttare il fatto che se $s = a$ è una radice doppia di $g(s) = 0$, $s = a$ deve essere una radice semplice di $g'(s) = 0$.]

57. Calcolare $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st}}{\sqrt{s+1}}\, ds$ dove $\gamma > 0$. (*b*) Come si può verificare la risposta?

Risp. $t^{-1/2}e^{-t}/\sqrt{\pi}$ se $t > 0$; 0 se $t < 0$

58. Completare le dimostrazioni di (*a*) caso 3 e (*b*) caso 4 del problema 2.

59. Al circuito elettrico di fig. 7-11 è applicata una tensione $E(t)$ avente l'andamento di una sinusoide raddrizzata a una alternanza come indicato in fig. 7-10. Supponendo che la carica del condensatore e la corrente siano nulle per $t = 0$, dimostrare che la carica del condensatore è in ogni istante successivo data da

$$Q(t) = \frac{\pi E_0}{LT^2\alpha^2\omega^2} + \frac{\pi E_0}{2LT}\left\{\frac{\sin\omega t - \sin\omega(t+T)}{\omega(\alpha^2-\omega^2)(1-\cos\omega T)} + \frac{\sin\alpha t - \sin\alpha(t+T)}{\alpha(\omega^2-\alpha^2)(1-\cos\alpha T)}\right\}$$
$$+ \frac{2\pi E_0}{LT^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt/T}{(\omega^2 - 4\pi^2n^2/T^2)(\alpha^2 - 4\pi^2n^2/T^2)}$$

dove $\omega^2 = 1/LC$; $\alpha^2 = \pi^2/T^2$ e $\omega \neq \alpha$.

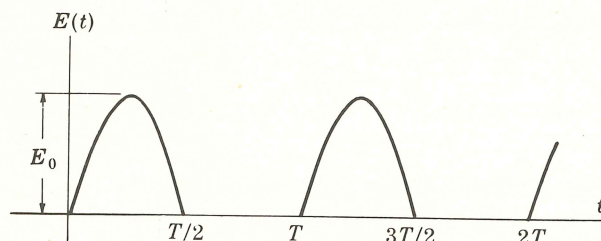



Fig. 7-10

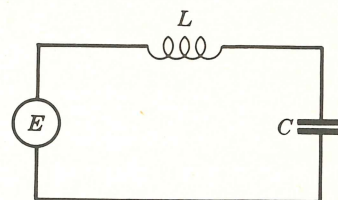



Fig. 7-11

60. Risolvere il problema 59 nel caso sia $\alpha = \omega$ ed indicare il significato fisico del risultato.

61. Verificare il *teorema 7-1*, pag. 202, per la funzione $e^{-a\sqrt{s}}/s$, $a > 0$ (v. problema 9).

62. Determinare $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(1-e^{-as})}\right\}$ dove $a > 0$, usando la formula di inversione e verificare usando un altro procedimento.

63. Dimostrare che $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-s^{1/3}}\} = \frac{3}{\pi}\int_0^\infty v^2 e^{-tv^3 - v/2}\sin\frac{\sqrt{3}\,v}{2}\, dv.$

64. Generalizzare il risultato del problema 63.

65. Una molla di rigidità k e di massa trascurabile è sospesa verticalmente ad un punto fisso e sorregge una massa m appesa alla sua estremità inferiore. La massa m è posta in vibrazione tirandola in basso ad una distanza x_0 e lasciandola quindi libera. Ogni volta che la massa si trova nel suo punto più basso, a partire dall'istante $t = 0$, viene impresso ad essa un impulso unitario. Determinare la posizione della massa in un generico istante $t > 0$ e discutere il risultato da un punto di vista fisico.

CAPITOLO 8

Applicazioni ai problemi dei valori al contorno

PROBLEMI DEI VALORI AL CONTORNO CHE COMPORTANO EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

Vari problemi scientifici e d'ingegneria, quando sono formulati matematicamente, portano a equazioni differenziali a derivate parziali dove figurano una o più funzioni incognite, unitamente a certe condizioni relative alle funzioni che sono dettate dal problema fisico.

Queste condizioni sono dette *condizioni al contorno.* Il problema di trovare soluzioni delle equazioni che soddisfino alle condizioni al contorno è detto *problema dei valori al contorno.*

ALCUNE IMPORTANTI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ALLE DERIVATE PARZIALI

1. Equazione unidimensionale di conduzione del calore

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

Qui $U(x, t)$ è la temperatura all'istante t nel punto x di un solido. La costante k, detta *diffusività*, è eguale a $K/c\rho$ dove si assume che la *conduttività termica K*, il *calore specifico* c e la *densità* (massa per unità di volume) ρ siano costanti. La quantità di calore trasferita attraverso una superficie piana per unità di superficie e di tempo è data da $-K\,U_x(x, t)$.

2. Equazione d'onda ad una dimensione

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Questa equazione è applicabile alle piccole vibrazioni trasversali di una corda tesa e flessibile inizialmente disposta lungo l'asse delle x e posta in moto (fig. 8-1). La variabile $Y(x, t)$ è lo spostamento di un generico punto x della corda nell'istante t. La costante $a^2 = T/\rho$, dove T è la tensione (costante) cui è sottoposta la corda e ρ è la massa (costante) per unità di lunghezza della corda.

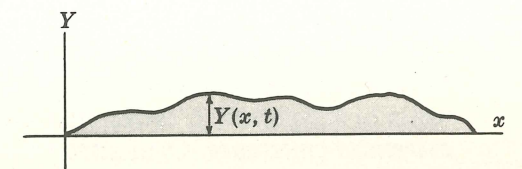



Fig. 8-1

3. Vibrazioni longitudinali di una trave

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

Questa equazione descrive il moto di una trave (fig. 8-2) che può vibrare longitudinalmente (cioè nella direzione x). La variabile $Y(x, t)$ è lo spostamento longitudinale della sezione trasversale x rispetto alla posizione di equilibrio.
La costante $c^2 = gE/\rho$ dove g è *accelerazione gravitazionale*, E è il *modulo di elasticità* (sforzo diviso deformazione) e dipende

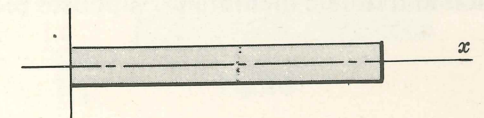



Fig. 8-2

dalle proprietà della trave, ρ è la densità (massa per unità di volume) della trave. Si noti che l'equazione è eguale a quella della corda vibrante.

4. **Vibrazioni trasversali di una trave**
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0$$

Questa equazione descrive il moto di una trave (inizialmente disposta lungo l'asse x, v. fig. 8-3) che vibra trasversalmente (cioè perpendicolarmente alla direzione x). In questo caso $Y(x, t)$ è lo spostamento trasversale (o flessione) in un generico punto x nell'istante generico t. La costante $b^2 = EIg/\rho$ dove E è il modulo di elasticità, I è il momento di inerzia di una sezione trasversale rispetto all'asse x, g è l'accelerazione di gravità e ρ è la massa per unità di lunghezza. Nel caso alla trave sia applicata una forza trasversale esterna $F(x, t)$, il secondo membro dell'equazione diventa $b^2 F(x, t)/EI$.

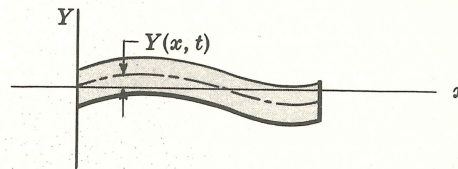



Fig. 8-3

5. **Conduzione del calore in un cilindro**
$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right)$$

Qui $U(r, t)$ è la temperatura in un generico istante t alla distanza r dell'asse del solido cilindrico. Si suppone naturalmente che il flusso del calore avvenga solo in direzione radiale.

6. **Linee di trasmissione**
$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t}$$
$$\frac{\partial I}{\partial x} = -GE - C\frac{\partial E}{\partial t}$$

Si tratta in questo caso di un sistema di due equazioni per la corrente I e la tensione E in una linea di trasmissione (fig. 8-4) per ogni posizione x e istante t generici. Le costanti R, L, G e C sono rispettivamente la resistenza, l'induttanza, la conduttanza e la capacità per unità di lunghezza. L'estremità $x = 0$ è detta *estremità emittente*. Ogni altro valore di x può essere considerato come *estremità ricevente*.

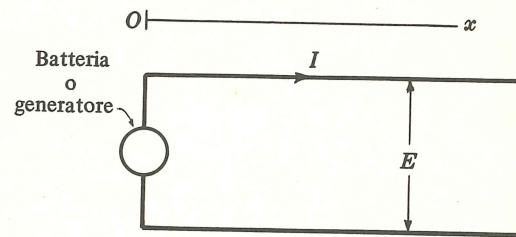



Fig. 8-4

PROBLEMI IN DUE O TRE DIMENSIONI

Molte delle equazioni differenziali a derivate parziali date sopra possono essere generalizzate e applicate a problemi in due o tre dimensioni. Ad es., se $Z(x, y, t)$ è lo spostamento trasversale di un generico punto (x, y) di una membrana del piano xy in un generico istante t, allora le vibrazioni di tale membrana, supposte piccole, seguono l'equazione

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right) \qquad (1)$$

Analogamente,
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right) = a^2\nabla^2\phi \qquad (2)$$

dove $\nabla^2\phi$ è detto il *laplaciano* di $\Phi(x, y, z, t)$, è l'equazione delle vibrazioni trasversali di una membrana pulsante in tre dimensioni.

L'equazione generale della conduzione del calore in un solido a tre dimensioni, assunta costante la conduttività termica, il calore specifico e la densità, è

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = k\nabla^2 U \qquad (3)$$

L'equazione per la temperatura a regime (quando U è indipendente dal tempo per cui $\partial U/\partial t = 0$) è

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = 0 \qquad (4)$$

che è detta *equazione di Laplace*. Questa è anche l'equazione del potenziale elettrico (o gravitazionale), dovuto ad una certa distribuzione di cariche (o masse), nei punti dove non c'è alcuna carica (o massa).

SOLUZIONE DEI PROBLEMI DEI VALORI AL CONTORNO CON LE TRASFORMATE DI LAPLACE

Con la trasformazione di Laplace (rispetto a t o a x) in un problema dei valori al contorno a una dimensione, l'equazione differenziale alle derivate parziali viene trasformata in una equazione differenziale ordinaria. La soluzione cercata può quindi essere ottenuta risolvendo l'equazione e quindi invertendo o con la formula di inversione o con altri procedimenti già considerati.

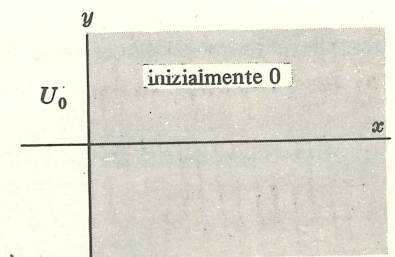
Per i problemi a due dimensioni, a volte conviene applicare due volte la trasformazione di Laplace (rispetto a t e quindi rispetto a x, ad es.) ed arrivare così ad una equazione differenziale ordinaria. In tale caso la soluzione cercata si ottiene con una *doppia inversione*. Questo procedimento è detto anche *trasformazione ripetuta di Laplace*. Un procedimento analogo può essere applicato ai problemi a tre o più dimensioni. A volte si possono risolvere problemi dei valori al contorno anche ricorrendo sia alle trasformate di Laplace che alle trasformate di Fourier (v. problema 14).

PROBLEMI RISOLTI

CONDUZIONE DEL CALORE

1. Un solido semi-infinito $x > 0$ (v. fig. 8-5) è inizialmente a temperatura zero. All'istante $t = 0$, viene applicata e mantenuta una temperatura costante $U_0 > 0$ sulla faccia $x = 0$. Determinare la temperatura di un punto generico del solido per $t > 0$.

Fig. 8-5

Il problema dei valori al contorno per la determinazione della temperatura $U(x, t)$ in un punto generico x e in un istante generico t è

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$U(x,0) = 0, \qquad U(0,t) = U_0, \qquad |U(x,t)| < M$$

dove l'ultima condizione esprime l'esigenza che la temperatura sia limitata per ogni valore di x e di t. Prendendo le trasformate di Laplace, si ha

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{s}{k}u = 0 \tag{1}$$

dove

$$u(0,s) = \mathcal{L}\{U(0,t)\} = \frac{U_0}{s} \tag{2}$$

e $u = u(x,s)$ deve essere limitata.

Risolvendo la (*1*), si ha

$$u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Allora si sceglie $c_1 = 0$ in modo che u sia limitata per $x \to \infty$, e si ha

$$u(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{3}$$

Dalla (*2*) si ha $c_2 = U_0/s$, per cui

$$u(x,s) = \frac{U_0}{s}e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Quindi per il problema 9, pag. 207 e il problema 10, pag. 209 si ha

$$U(x,t) = U_0 \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt}) = U_0\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x/2\sqrt{kt}} e^{-u^2}\,du\right\}$$

2. Risolvere il problema 1 supponendo che la temperatura applicata sia data da $G(t)$, $t > 0$.

In questo caso il problema dei valori al contorno è eguale a quello del problema precedente, salvo il fatto che la condizione al contorno $U(0,t) = U_0$ è sostituita dalla $U(0,t) = G(t)$. Allora se $g(s)$ è la trasformata di Laplace di $G(t)$, dalla (*3*) del problema 1 si ha che $c_2 = g(s)$ e quindi

$$u(x,s) = g(s)\,e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$

Ora per il problema 11, pag. 209,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s/k}\,x}\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\,t^{-3/2}\,e^{-x^2/4kt}$$

Quindi per il teorema della convoluzione,

$$U(x,t) = \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\,u^{-3/2}\,e^{-x^2/4ku}\,G(t-u)\,du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{kt}}^{\infty} e^{-v^2}\,G\left(t - \frac{x^2}{4kv^2}\right)dv$$

ponendo $v = x^2/4ku$.

3. Un'asta di lunghezza l (v. fig. 8-6) è a temperatura costante U_0. Nell'istante $t = 0$ l'estremità $x = l$ è portata istantaneamente alla temperatura costante U_1 e l'estremità $x = 0$ viene isolata. Supponendo che la superficie laterale dell'asta sia anch'essa isolata, determinare la temperatura in un generico punto x dell'asta in un generico istante $t > 0$.

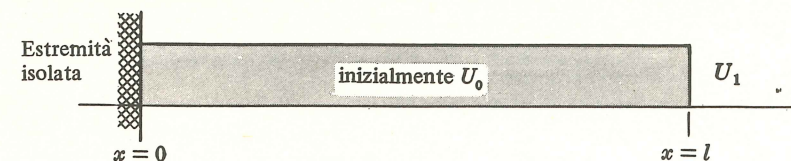



Fig. 8-6

Il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$U(x,0) = U_0, \qquad U_x(0,t) = 0, \qquad U(l,t) = U_1$$

Prendendo le trasformate di Laplace si ha

$$su - U(x,0) = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0,s) = 0, \qquad u(l,s) = \frac{U_1}{s} \tag{2}$$

La soluzione generale della (*1*) è

$$u = c_1\cosh\sqrt{s/k}\,x + c_2\sinh\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

Per la prima delle condizioni (*2*) si ha $c_2 = 0$ e quindi

$$u = c_1\cosh\sqrt{s/k}\,x + \frac{U_0}{s}$$

Per la seconda delle condizioni (*2*) si ha

$$c_1\cosh\sqrt{s/k}\,l + \frac{U_0}{s} = \frac{U_1}{s} \quad \text{o} \quad c_1 = \frac{U_1 - U_0}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

Quindi

$$u(x,s) = \frac{U_0}{s} + (U_1 - U_0)\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}$$

L'antitrasformata del primo termine è U_0. Per la formula di inversione complessa, l'antitrasformata del secondo termine a parte il fattore costante $U_1 - U_0$ è data da

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st}\,\frac{\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\,ds$$

Come nel problema 13, pag. 210, è facile dimostrare che questo è eguale alla somma di tutti i residui dell'integrando nei poli che sono poli semplici e cadono nei punti

$$s = 0, \qquad \sqrt{s/k}\,l = (n - \tfrac{1}{2})\pi i \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

o

$$s = 0, \qquad s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ora:

Il residuo in $s = 0$ è
$$\lim_{s\to 0} (s)\left(\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right) = 1$$

Il residuo in $s = -\frac{(2n-1)^2\pi^2 k}{4l^2} = s_n$ è

$$\lim_{s\to s_n}(s-s_n)\left(\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right)$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{s-s_n}{\cosh\sqrt{s/k}\,l}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \left\{\lim_{s\to s_n}\frac{1}{(\sinh\sqrt{s/k}\,l)(l/2\sqrt{ks})}\right\}\left\{\lim_{s\to s_n}\frac{e^{st}\cosh\sqrt{s/k}\,x}{s}\right\}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

dove si è fatto uso della regola di L'Hospital. Si ha quindi

$$U(x,t) = U_1 + \frac{4(U_1-U_0)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\,e^{-(2n-1)^2\pi^2 kt/4l^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}$$

CORDA VIBRANTE

4. Una corda di lunghezza infinita con una estremità in $x = 0$ si trova inizialmente in posizione di riposo lungo l'asse x. L'estremità in $x = 0$ viene sottoposta ad uno spostamento trasversale periodico dato da $A_0 \sin \omega t$, $t > 0$. Determinare lo spostamento di un generico punto della corda in un generico istante t.

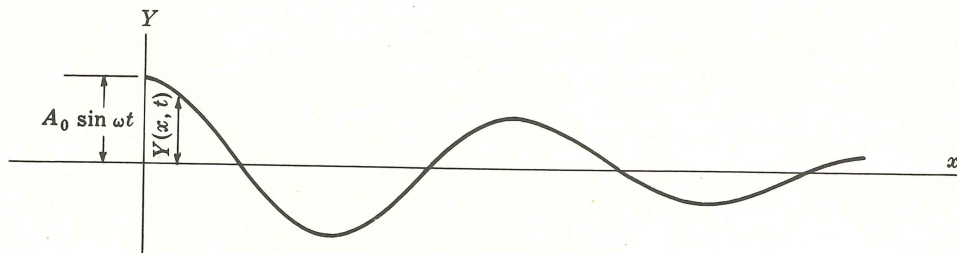



Fig. 8-7

Se $Y(x, t)$ è lo spostamento trasversale della corda per un punto generico x ed un istante generico t, il problema dei valori al contorno è dato da

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x>0,\ t>0 \tag{1}$$

$$Y(x,0)=0,\quad Y_t(x,0)=0,\quad Y(0,t)=A_0\sin\omega t,\quad |Y(x,t)|<M \tag{2}$$

dove l'ultima condizione impone che lo spostamento sia limitato.

Prendendo le trasformate di Laplace, si ha, se $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$,

$$s^2 y - sY(x,0) - Y_t(x,0) = a^2\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y = 0 \tag{3}$$

$$y(0,t) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}, \qquad y(x,s) \text{ è limitato} \tag{4}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$y(x,s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

Per la condizione che impone che lo spostamento sia limitato si ha $c_1 = 0$. Allora

$$y(x,s) = c_2 e^{-sx/a}$$

Per la prima delle condizioni (4), $c_2 = A_0\omega/(s^2+\omega^2)$. Allora

$$y(x,s) = \frac{A_0\omega}{s^2+\omega^2}e^{-sx/a}$$

e quindi
$$Y(x,t) = \begin{cases} A_0\sin\omega(t-x/a) & t > x/a \\ 0 & t < x/a\end{cases}$$

Fisicamente ciò significa che un punto x della corda resta in quiete fino all'istante $t = x/a$. A partire da questo istante esso compie uno spostamento identico a quello della estremità $x = 0$ ma in arretrato rispetto ad essa di un intervallo di tempo eguale a x/a. La costante a è la velocità a cui viaggia l'onda.

5. Una corda flessibile ben tesa ha le estremità fissate in $x = 0$ e $x = l$. Nell'istante $t = 0$ alla corda è impressa una configurazione data da $F(x) = \mu x(l-x)$, dove μ è una costante, e quindi lasciata libera. Determinare lo spostamento di un generico punto x della corda per ogni istante $t > 0$.

Il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0<x<l,\ t>0$$

$$Y(0,t)=0,\quad Y(l,t)=0,\quad Y(x,0)=\mu x(l-x),\quad Y_t(x,0)=0$$

Prendendo le trasformate di Laplace, si ha, se $y(x,s) = \mathcal{L}\{Y(x,t)\}$,

$$s^2 y - sY(x,0) - Y_t(x,0) = a^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

o
$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2}y = -\frac{\mu s x(l-x)}{a^2} \tag{1}$$

dove
$$y(0,s)=0,\quad y(l,s)=0 \tag{2}$$

La soluzione generale della (1) è

$$y = c_1\cosh\frac{sx}{a} + c_2\sinh\frac{sx}{a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3} \tag{3}$$

Dalle condizioni (2) si ha

$$c_1 = \frac{2a^2\mu}{s^3},\qquad c_2 = \frac{2a^2\mu}{s^3}\left(\frac{1-\cosh sl/a}{\sinh sl/a}\right) = -\frac{2a^2\mu}{s^3}\tanh sl/2a \tag{4}$$

per cui la (3) diventa
$$y = \frac{2a^2\mu}{s^3}\frac{\cosh s(2x-l)/2a}{\cosh sl/2a} + \frac{\mu x(l-x)}{s} - \frac{2a^2\mu}{s^3}$$

Usando i residui (v. problema 17, pag. 213) si ha

$$Y(x,t) = a^2\mu\left\{t^2 + \left(\frac{2x-l}{2a}\right)^2 - \left(\frac{l}{2a}\right)^2\right\}$$
$$- \frac{32a^2\mu}{\pi^3}\left(\frac{l}{2a}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi(2x-l)}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$$
$$+ \mu x(l-x) - a^2\mu t^2$$

o
$$Y(x,t) = \frac{8\mu l^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$$

VIBRAZIONI DELLE TRAVI

6. Una trave di lunghezza l incastrata nell'estremità $x = 0$, come indicato in fig. 8-8, è inizialmente in quiete. Una forza F_0 per unità di superficie viene applicata longitudinalmente alla estremità libera. Determinare lo spostamento longitudinale di un generico punto x della trave per ogni $t > 0$.

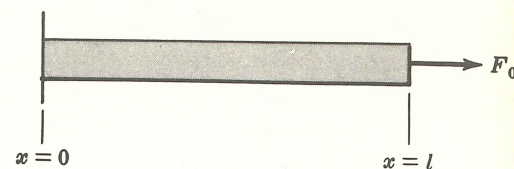



Fig. 8-8

Se $Y(x, t)$ è lo spostamento longitudinale del punto generico x della trave nell'istante t, il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$Y(x, 0) = 0, \qquad Y_t(x, 0) = 0, \qquad Y(0, t) = 0, \qquad Y_x(l, t) = F_0/E$$

dove E è il modulo di Young.

Prendendo le trasformate di Laplace, si ha, se $y(x, s) = \mathcal{L}\{Y(x, t)\}$,

$$s^2 y(x, s) - s\,Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} y = 0$$

$$y(0, s) = 0, \qquad y_x(l, s) = F_0/Es \tag{1}$$

Risolvendo l'equazione differenziale si ha

$$y(x, s) = c_1 \cosh(sx/c) + c_2 \sinh(sx/c)$$

Per la prima delle condizioni (1), $c_1 = 0$ e quindi

$$y(x, s) = c_2 \sinh(sx/c)$$

$$y_x(x, s) = c_2 (s/c) \cosh(sx/c)$$

Per la seconda delle condizioni (1) si ha

$$c_2 (s/c) \cosh(sl/c) = F_0/Es \qquad \text{o} \qquad c_2 = \frac{cF_0}{Es^2 \cosh(sl/c)}$$

Allora

$$y(x, s) = \frac{cF_0}{E} \cdot \frac{\sinh(sx/c)}{s^2 \cosh(sl/c)} \tag{2}$$

Quindi per il problema 14, pag. 211,

$$Y(x, t) = \frac{F_0}{E}\left[x + \frac{8l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \cos\frac{(2n-1)\pi ct}{2l}\right] \tag{3}$$

7. Nella trave del problema precedente, determinare il moto della estremità libera $x = l$ in funzione del tempo t.

Per $x = l$ dalla (2) del problema 6 si ha

$$y(x, s) = \frac{cF_0}{E} \frac{\sinh(sl/c)}{s^2 \cosh(sl/c)}$$

Ma per il problema 92, pag. 34 o il caso 134, pag. 253, questa è la trasformata di Laplace dell'onda triangolare di fig. 8-9 che dà lo spostamento dell'estremità $x = l$ in funzione del tempo.

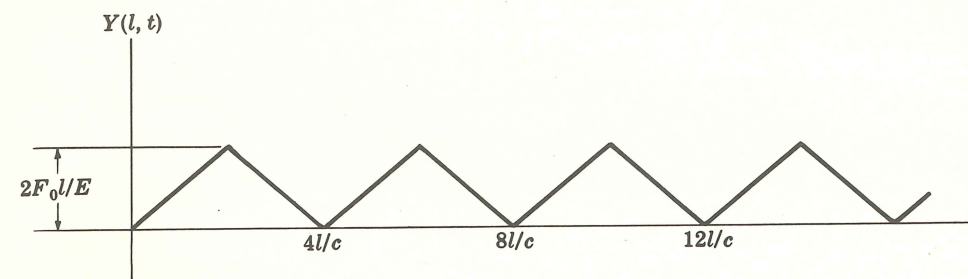



Fig. 8-9

8. Una trave semi-infinita inizialmente in quiete lungo l'asse x nell'istante $t = 0$ subisce all'estremità $x = 0$ uno spostamento trasversale h. Determinare lo spostamento trasversale $Y(x, t)$ per ogni punto $x > 0$ e per ogni istante $t > 0$.

Il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad x > 0, \ t > 0 \tag{1}$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y(0, t) = h, \quad Y_{xx}(0, t) = 0, \quad |Y(x, t)| < M \tag{2}$$

Prendendo le trasformate di Laplace si ha

$$s^2 y(x, s) - s\,Y(x, 0) - Y_t(x, 0) + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{s^2}{b^2} y = 0$$

$$y(0, s) = h/s, \qquad y_{xx}(0, s) = 0, \qquad y(x, s) \text{ è limitata} \tag{3}$$

La soluzione generale della equazione differenziale è

$$y(x, s) = e^{\sqrt{s/2b}\,x}(c_1 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_2 \sin\sqrt{s/2b}\,x) + e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4 \sin\sqrt{s/2b}\,x)$$

Dalla condizione della limitatezza si ha $c_1 = c_2 = 0$ per cui

$$y(x, s) = e^{-\sqrt{s/2b}\,x}(c_3 \cos\sqrt{s/2b}\,x + c_4 \sin\sqrt{s/2b}\,x)$$

Dalla prima e dalla seconda delle condizioni al contorno (3) si ha $c_4 = 0$ e $c_3 = h/s$ per cui

$$y(x, s) = \frac{h}{s} e^{-\sqrt{s/2b}\,x} \cos\sqrt{s/2b}\,x$$

L'antitrasformata di Laplace, per la formula di inversione complessa, è

$$Y(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{h e^{st - \sqrt{s/2b}\,x} \cos\sqrt{s/2b}\,x}{s}\, ds$$

Per calcolare questo integrale, usare il contorno indicato in fig. 8-10 dato che $s = 0$ è un punto di diramazione. Procedendo come nel problema 9, pag. 207, si ha, tralasciando per brevità di indicare l'integrando,

$$Y(x, t) = -\lim_{\substack{R \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL}\right\} \tag{4}$$

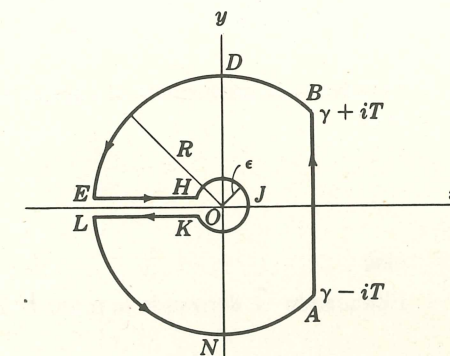



Fig. 8-10

Lungo EH, $s = ue^{\pi i}$, $\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ e si ha

$$\int_{EH} = \int_R^{\epsilon} \frac{he^{-ut - i\sqrt{u/2b}\,x} \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

Lungo KL, $s = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ e si ha

$$\int_{KL} = \int_{\epsilon}^{R} \frac{he^{-ut + i\sqrt{u/2b}\,x} \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du$$

Lungo HJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ e si ha

$$\int_{HJK} = \int_{\pi}^{-\pi} h\,e^{\epsilon e^{i\theta}t - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x} \cos \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/2b}\,x\,d\theta$$

Allora la (4) diventa

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-ut} \sin \sqrt{u/2b}\,x \cosh \sqrt{u/2b}\,x}{u}\,du\right\}$$

Posto $u/2b = v^2$, questa può essere scritta nella forma

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-2bv^2t} \sin vx \cosh vx}{v}\,dv\right\}$$

Il risultato può essere scritto anche in termini di *integrali di Fresnel* (v. problema 66 e i casi 10 e 11 di pag. 255) nella forma

$$Y(x,t) = h\left\{1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{bt}} (\cos w^2 + \sin w^2)\,dw\right\}$$

LINEE DI TRASMISSIONE

9. Una linea di trasmissione semi-infinita di induttanza e conduttanza per unità di lunghezza trascurabili è sottoposta all'estremità $x = 0$ ad una tensione

$$E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Determinare la tensione $E(x, t)$ e la corrente $I(x, t)$ per ogni punto $x > 0$ e istante $t > 0$.

Se si assume $L = 0$ e $G = 0$, le equazioni della linea di trasmissione sono date da

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -RI, \qquad \frac{\partial I}{\partial x} = -C\frac{\partial E}{\partial t} \tag{1}$$

Le condizioni al contorno sono

$$E(x,0) = 0, \quad I(x,0) = 0, \quad E(0,t) = \begin{cases} E_0 & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases}, \quad |E(x,t)| < M$$

Prendendo le trasformate di Laplace e usando i simboli $\mathcal{L}\{E(x,t)\} = \bar{E}(x,s)$, $\mathcal{L}\{I(x,t)\} = \bar{I}(x,s)$, si ha

$$\frac{d\bar{E}}{dx} = -R\bar{I}, \qquad \frac{d\bar{I}}{dx} = -C\{s\bar{E} - E(x,0)\}$$

cioè

$$\frac{d\bar{E}}{dx} = -R\bar{I}, \qquad \frac{d\bar{I}}{dx} = -Cs\bar{E} \tag{2}$$

Eliminando $\bar{I}$ derivando la prima delle equazioni (2) rispetto a x si ha

$$\frac{d^2\bar{E}}{dx^2} = -R\frac{d\bar{I}}{dx} = RCs\bar{E} \quad \text{o} \quad \frac{d^2\bar{E}}{dx^2} - RCs\bar{E} = 0 \tag{3}$$

La soluzione generale della (3) è

$$\bar{E}(x,s) = c_1 e^{\sqrt{RCs}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{RCs}\,x}$$

e dovendo la soluzione essere limitata si ha $c_1 = 0$. Allora

$$\bar{E}(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{RCs}\,x} \tag{4}$$

Si ponga $E(0,t) = G(t)$ e $\mathcal{L}\{E(0,t)\} = \bar{E}(0,s) = g(s)$. Allora dalla (4) si ha $c_2 = g(s)$, e quindi

$$\bar{E}(x,s) = g(s)\,e^{-\sqrt{RCs}\,x} \tag{5}$$

Allora per il problema 2 si ha, per il teorema della convoluzione,

$$E(x,t) = \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u}\,G(t-u)\,du$$

Ora, dato che

$$G(t-u) = \begin{cases} E_0 & 0 < t-u < T \text{ o } t-T = u < t \\ 0 & t-u > T \quad\quad u < t-T \end{cases}$$

ne segue che se $t > T$,

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \int_{t-T}^{t} \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0\,du \\ &= \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}} \int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\,dv \qquad \text{(ponendo } RCx^2/4u = v^2\text{)} \\ &= E_0\left\{\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t-T}} e^{-v^2}\,dv - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}} e^{-v^2}\,dv\right\} \\ &= E_0\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t-T}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{t}}\right)\right\} \end{aligned}$$

mentre se $0 < t < T$,

$$\begin{aligned} E(x,t) &= \int_0^t \frac{x\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi}} u^{-3/2} e^{-RCx^2/4u} E_0\,du = \frac{2E_0}{\sqrt{\pi}}\int_{x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-v^2}\,dv \\ &= E_0\{1 - \operatorname{erf}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})\} \\ &= E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Dato che $I = -\frac{1}{R}\frac{\partial E}{\partial x}$, derivando si ottiene

$$I(x,t) = \begin{cases} \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{C}{R}}\,t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} & 0 < t < T \\[2ex] \dfrac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\dfrac{C}{R}}\left[t^{-3/2} e^{-RCx^2/4t} - (t-T)^{-3/2} e^{-RCx^2/4(t-T)}\right] & t > T \end{cases}$$

PROBLEMI VARI

10. (*a*) Risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0$$

$$U(x,0) = U_0, \qquad U_x(0,t) = -\alpha U(0,t), \qquad |U(x,t)| < M$$

(*b*) Interpretare il problema nel campo della conduzione termica.

Il problema si presenta quando si considera un solido conduttore semi-infinito la cui temperatura iniziale sia U_0 e che irraggi in un mezzo $x < 0$ a temperatura zero. Si suppone che l'irraggiamento sia tale che il flusso sulla faccia $x = 0$ sia proporzionale alla differenza di temperatura tra la faccia $x = 0$ e il mezzo $x < 0$, cioè che

$$U_x(0, t) = -\alpha[U(0, t) - 0] = -\alpha\, U(0, t)$$

Fig. 8-11

Per ottenere la soluzione, si prendono le trasformate di Laplace e si ottiene

$$su - U_0 = k\frac{d^2u}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} = -\frac{U_0}{k} \tag{1}$$

$$u_x(0, s) = -\alpha\, u(0, s), \qquad u(x, s) \text{ è limitata.} \tag{2}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$u(x, s) = c_1\, e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Data che la funzione è limitata, deve essere $c_1 = 0$. Allora

$$u(x, s) = c_2\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Dalla prima delle condizioni (2) si ricava $c_2 = \dfrac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)}$ per cui

$$u(x, s) = \frac{\alpha U_0}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, e^{-\sqrt{s/k}\,x} + \frac{U_0}{s}$$

Allora usando la formula di inversione complessa,

$$U(x, t) = U_0 + \alpha U_0\, \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\right\}$$

$$= U_0 + \frac{\alpha U_0}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds$$

Come nel problema 8, omettendo di scrivere l'integrando, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds = -\lim_{\substack{R \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{EH} + \int_{HJK} + \int_{KL}\right\} \tag{3}$$

Lungo EH, $s = ue^{\pi i}$, $\sqrt{s} = i\sqrt{u}$ si ha

$$\int_{EH} = \int_R^\epsilon \frac{e^{-ut - i\sqrt{s/k}\,x}}{u(i\sqrt{u} - \alpha)}\, du$$

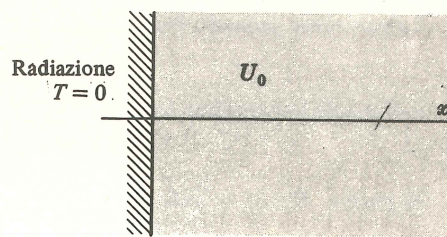
Lungo KL, $s = ue^{-\pi i}$, $\sqrt{s} = -i\sqrt{u}$ si ha

$$\int_{KL} = \int_\epsilon^R \frac{e^{-ut + i\sqrt{s/k}\,x}}{u(-i\sqrt{u} - \alpha)}\, du$$

Lungo HJK, $s = \epsilon e^{i\theta}$ si ha

$$\int_{HJK} = \int_\pi^{-\pi} \frac{e^{\epsilon e^{i\theta} t - \sqrt{\epsilon e^{i\theta}/k}\,x}}{\sqrt{\epsilon}\, e^{i\theta/2} - \alpha}\, i\, d\theta$$

Usando nella (3) questi risultati si vede che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{e^{st - \sqrt{s/k}\,x}}{s(\sqrt{s} - \alpha)}\, ds = -\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u} - \alpha \sin x\sqrt{u}}{u + \alpha^2}\right] du$$

Quindi

$$U(x, t) = \frac{\alpha U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-ut}}{u}\left[\frac{\sqrt{u}\cos x\sqrt{u} - \alpha \sin x\sqrt{u}}{u + \alpha^2}\right] du$$

$$= \frac{2\alpha U_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-v^2 t}}{v}\left[\frac{v\cos xv - \alpha \sin xv}{v^2 + \alpha^2}\right] dv$$

se $u = v^2$.

11. Una corda flessibile e tesa ha le sue estremità sull'asse x nei punti $x = 0$ e $x = 1$. Nell'istante $t = 0$ alla corda viene data una configurazione definita da $F(x)$, $0 < x < 1$, e quindi viene lasciata libera. Determinare lo spostamento del generico punto x per ogni valore di $t > 0$.

Il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < 1,\ t > 0 \tag{1}$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(1, t) = 0, \quad Y(x, 0) = F(x), \quad Y_t(x, 0) = 0 \tag{2}$$

Invece della equazione (1) conviene considerare l'equazione

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$$

e, una volta ottenuta la soluzione finale, sostituire at a t (v. problema 49).

Prendendo le trasformate di Laplace, si ha

$$s^2 y - s\,Y(x, 0) - Y_t(x, 0) = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dx^2} - s^2 y = -s\,F(x) \tag{3}$$

$$y(0, s) = 0, \quad y(1, s) = 0 \tag{4}$$

La soluzione generale della (3) è (v. problema 8, pag. 85)

$$y(x, s) = c_1 \cosh sx + c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x - u)\, du$$

Dalla prima delle condizioni date in (4) si ha $c_1 = 0$ per cui

$$y(x, s) = c_2 \sinh sx - \int_0^x F(u) \sinh s(x - u)\, du \tag{5}$$

Dalla seconda delle condizioni in (4) si ha

$$0 = c_2 \sinh s - \int_0^1 F(u) \sinh s(1 - u)\, du$$

o

$$c_2 = \int_0^1 F(u)\, \frac{\sinh s(1 - u)}{\sinh s}\, du$$

Quindi la (5) diventa

$$y(x, s) = \int_0^1 F(u)\, \frac{\sinh s(1 - u) \sinh sx}{\sinh s}\, du - \int_0^x F(u) \sinh s(x - u)\, du$$

Il primo integrale può essere scritto come somma di due integrali uno da 0 a x e l'altro da x a 1. Allora

$$y(x, s) = \int_0^x F(u)\left\{\frac{\sinh s(1 - u) \sinh sx}{\sinh s} - \sinh s(x - u)\right\} du + \int_x^1 F(u)\, \frac{\sinh s(1 - u) \sinh sx}{\sinh s}\, du$$

$$= \int_0^x F(u)\, \frac{\sinh s(1 - x) \sinh su}{\sinh s}\, du + \int_x^1 F(u)\, \frac{\sinh s(1 - u) \sinh sx}{\sinh s}\, du$$

Ora occorre determinare l'antitrasformata di Laplace. Per la formula di inversione complessa, l'antitrasformata del primo termine è

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}\left\{\int_0^x F(u)\,\frac{\sinh s(1-x)\,\sinh su}{\sinh s}\,du\right\}ds$$

Dato che questo è eguale alla somma dei residui nei poli semplici $s = n\pi i$, si ha l'antitrasformata cercata

$$\sum_{n=+\infty}^{\infty} e^{n\pi i t}\int_0^x F(u)\,\frac{\sin n\pi(1-x)\,\sin n\pi u}{-\cos n\pi}\,du \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^x F(u)\,\sin n\pi u\,du\right\}\sin n\pi x\,\cos n\pi t$$

Analogamente l'antitrasformata del secondo termine è

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_x^1 F(u)\,\sin n\pi u\,du\right\}\sin n\pi x\,\cos n\pi t$$

Sommando si ha

$$Y(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\,\sin n\pi u\,du\right\}\sin n\pi x\,\cos n\pi t$$

Se ora si sostituisce at a t si ha

$$Y(x,t) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^1 F(u)\,\sin n\pi u\,du\right\}\sin n\pi x\,\cos n\pi a t$$

12. Un cilindro circolare di lunghezza infinita e raggio unitario è inizialmente ad una temperatura T costante.
Nell'istante $t = 0$ la superficie laterale è portata alla temperatura di 0 °C ed è quindi mantenuta a tale temperatura. Determinare la temperatura del generico punto x del cilindro nel generico istante t.

Fig. 8-12

Se (r, ϕ, z) sono le coordinate cilindriche del punto generico del cilindro e se l'asse del cilindro coincide con l'asse delle x (v. fig. 8-12), è chiaro che la temperatura è indipendente da ϕ e z e può quindi essere indicata con $U(r,t)$. Il problema dei valori al contorno è

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad = \quad k\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right) \qquad 0 < r < 1 \qquad (1)$$

$$U(1,t) = 0, \qquad U(r,0) = T, \qquad |U(r,t)| < M \qquad (2)$$

Invece della equazione (*1*) conviene considerare l'equazione

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad = \quad \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}$$

e sostituire t con kt.

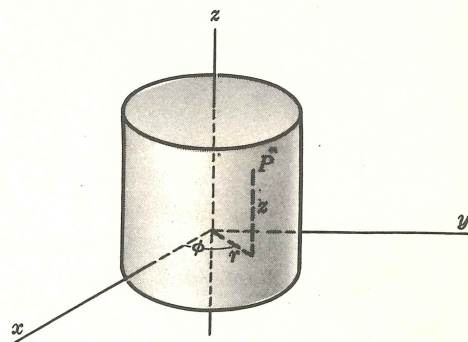
Prendendo le trasformate di Laplace si ha

$$su - U(r,0) \quad = \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - su \quad = \quad -T$$

$$u(1,s) = 0, \qquad u(r,s) \ \text{è limitata}$$

La soluzione generale di questa equazione è data in termini di funzioni di Bessel da

$$u(r,s) \quad = \quad c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + c_2 Y_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

Dato che $Y_0(i\sqrt{s}\,r)$ è illimitata per $r \to 0$, si deve assumere $c_2 = 0$.

Allora
$$u(r,s) \quad = \quad c_1 J_0(i\sqrt{s}\,r) + \frac{T}{s}$$

Da $u(1,s) = 0$, si ha

$$c_1 J_0(i\sqrt{s}) + \frac{T}{s} \quad = \quad 0 \qquad \text{o} \qquad c_1 \quad = \quad -\frac{T}{s\,J_0(i\sqrt{s})}$$

Quindi
$$u(r,s) \quad = \quad \frac{T}{s} - \frac{T\,J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})}$$

Per la formula di inversione,

$$U(r,t) \quad = \quad T - \frac{T}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})}\,ds$$

Ora $J_0(i\sqrt{s})$ ha zeri semplici dove $i\sqrt{s} = \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$. Quindi l'integrando ha poli semplici in $s = -\lambda_n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ e inoltre in $s = 0$. Si può inoltre dimostrare che l'integrando soddisfa alle condizioni del problema 2, pag. 203 per cui si può applicare il metodo dei residui.

Si ha:

Il residuo dell'integrando in $s = 0$ è

$$\lim_{s\to 0} s\,\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})} \quad = \quad 1$$

Il residuo dell'integrando in $s = -\lambda_n^2$ è

$$\lim_{s\to-\lambda_n^2}(s+\lambda_n^2)\,\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s\,J_0(i\sqrt{s})} \quad = \quad \left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2}\frac{s+\lambda_n^2}{J_0(i\sqrt{s})}\right\}\left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2}\frac{e^{st}J_0(i\sqrt{s}\,r)}{s}\right\}$$

$$= \quad \left\{\lim_{s\to-\lambda_n^2}\frac{1}{J_0'(i\sqrt{s})\,i/2\sqrt{s}}\right\}\left\{\frac{e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{-\lambda_n^2}\right\}$$

$$= \quad -\frac{2e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

dove si è fatto uso della regola di L'Hospital per calcolare il limite e anche del fatto che $J_0'(u) = -J_1(u)$.

Allora

$$U(r,t) \quad = \quad T - T\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}\right\}$$

$$= \quad 2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

Sostituendo kt a t si ha la soluzione cercata

$$U(r,t) \quad = \quad 2T\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-k\lambda_n^2 t}J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$$

13. Una asta semi-infinita e isolata che coincide con l'asse delle x, $x > 0$, si trova inizialmente a temperatura eguale a zero. Nell'istante $t = 0$, nel punto $x = a$ con $a > 0$ si genera una certa quantità di calore. Determinare la temperatura di un generico punto x dell'asta in un generico istante $t > 0$.

L'equazione della trasmissione di calore nell'asta è

$$\frac{\partial U}{\partial t} \quad = \quad k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0 \qquad (1)$$

Il fatto che si generi istantaneamente nel punto $x = a$ una certa quantità di calore può essere rappresentato con la condizione al contorno

$$U(a, t) \quad = \quad Q\,\delta(t) \tag{2}$$

dove Q è una costante e $\delta(t)$ è la funzione delta di Dirac. Inoltre, dato che la temperatura iniziale è zero e dato che la temperatura deve essere limitata, si ha

$$U(x, 0) \;=\; 0, \qquad |U(x,t)| \;<\; M \tag{3}$$

Prendendo le trasformate di Laplace della (*1*) e della (*2*), usando la prima delle condizioni (*3*), si ha

$$su - U(x, 0) \;=\; k\frac{d^2u}{dx^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{su}{k} \;=\; 0 \tag{4}$$

$$u(a, s) \;=\; Q \tag{5}$$

Dalla (*4*) si ha
$$u(x, s) \;=\; c_1 e^{\sqrt{s/k}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x}$$
e la condizione che la temperatura sia limitata porta a $c_1 = 0$ per cui

$$u(x, s) \;=\; c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,x} \tag{6}$$

Allora dalla (*5*) $\quad u(a, s) \;=\; c_2 e^{-\sqrt{s/k}\,a} \;=\; Q \qquad \text{o} \qquad c_2 \;=\; Q e^{\sqrt{s/k}\,a}$

per cui

$$u(x, s) \;=\; Q e^{-(x-a)\sqrt{s/k}} \tag{7}$$

Invertendo, sfruttando il problema 11, pag. 209, si ha la temperatura richiesta

$$U(x, t) \;=\; \frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\,e^{-(x-a)^2/4kt} \tag{8}$$

Il punto sorgente è detto anche *sorgente di calore di forza* Q.

14. Una lastra semi-infinita di larghezza π (v. fig. 8-13) ha le superfici laterali isolate. Gli spigoli semi-infiniti sono mantenuti a 0 °C, mentre lo spigolo finito è mantenuto a 100 °C. Supponendo che la temperatura iniziale sia 0 °C, determinare la temperatura di un generico punto in un generico istante.

Supponendo che la diffusività sia uno, il problema dei valori al contorno per la determinazione della temperatura $U(x, y, t)$ è

$$\frac{\partial U}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1}$$

$$U(0, y, t) \;=\; 0 \tag{2}$$

$$U(\pi, y, t) \;=\; 0 \tag{3}$$

$$U(x, y, 0) \;=\; 0 \tag{4}$$

$$U(x, 0, t) \;=\; 100 \tag{5}$$

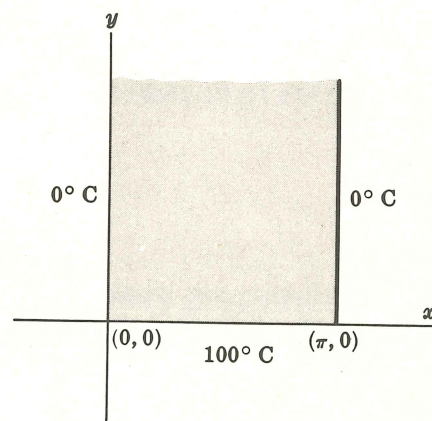
$$|\,U(x, y, t)\,| \;<\; M \tag{6}$$

dove $\quad 0 < x < \pi, \;\; y > 0, \;\; t > 0.$

Fig. 8-13

Prendendo la trasformata di Laplace della equazione (*1*) e sfruttando la condizione (*4*), si ha, se $u = u(x, y, s) = \mathcal{L}\{U(x, y, t)\}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; su \tag{7}$$

Moltiplicando la (*7*) per $\sin nx$ e integrando tra 0 e π (cioè prendendo la trasformata seno, v. pag. 175), si ha

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sin nx\,dx + \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sin nx\,dx \;=\; \int_0^\pi su\sin nx\,dx$$

o, se $\tilde u = \int_0^\pi u\sin nx\,dx$,

$$-n^2\tilde u + n\,u(\pi, y, s)\cos n\pi + n\,u(0, y, s) + \frac{d^2\tilde u}{dy^2} \;=\; s\tilde u \tag{8}$$

Dato che dalle trasformate di Laplace delle condizioni (*2*) e (*3*) si ha

$$u(0, y, s) \;=\; 0, \qquad u(\pi, y, s) \;=\; 0$$

la (*8*) diventa
$$\frac{d^2\tilde u}{dy^2} - (n^2 + s)\tilde u \;=\; 0$$

Questa ammette la soluzione
$$\tilde u \;=\; A e^{y\sqrt{n^2+s}} + B e^{-y\sqrt{n^2+s}}$$

Dalla condizione che $\tilde u$ sia limitata per $y \to \infty$, si ricava che deve essere $A = 0$ per cui

$$\tilde u \;=\; B e^{-y\sqrt{n^2+s}} \tag{9}$$

Dalla condizione (*5*)

$$\tilde u(n, 0, s) \;=\; \int_0^\pi \frac{100}{s}\sin nx\,dx \;=\; \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)$$

Quindi ponendo $y = 0$ nella (*9*), si ha

$$B \;=\; \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right)$$

o
$$\tilde u \;=\; \frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) e^{-y\sqrt{n^2+s}}$$

Per la formula di inversione seno di Fourier (v. pag. 175), si ha

$$u \;=\; \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100}{s}\left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) e^{-y\sqrt{n^2+s}}\sin nx \tag{10}$$

Si deve ora determinare l'antitrasformata di Laplace di questa. E' noto che

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s}}\} \;=\; \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-y^2/4t}$$

per cui
$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-y\sqrt{s+n^2}}\} \;=\; \frac{y}{2\sqrt{\pi t^3}}\,e^{-y^2/4t}\,e^{-n^2 t}$$

Quindi
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-y\sqrt{s+n^2}}}{s}\right\} \;=\; \int_0^t \frac{y}{2\sqrt{\pi v^3}}\,e^{-y^2/4v}\,e^{-n^2 v}\,dv$$
$$=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2 + n^2y^2/4p^2)}\,dp$$

avendo posto $y^2/4v = p^2$.

Invertendo termine a termine nella *(10)* e usando questo risultato si ha

$$U(x,y,t) \;=\; \frac{400}{\pi^{3/2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos n\pi}{n}\right) \sin nx \int_{y/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-(p^2+n^2y^2/4p^2)}\,dp$$

PROBLEMI SUPPLEMENTARI

CONDUZIONE DEL CALORE

15. Un solido semi-infinito $x > 0$ si trova inizialmente alla temperatura zero. Alla faccia $x = 0$ viene applicato un flusso costante di calore A per cui $-K\,U_x(0,t) = A$. Dimostrare che la temperatura della faccia dopo il tempo t è $\frac{A}{K}\sqrt{\frac{kt}{\pi}}$.

16. Determinare la temperatura di un generico punto $x > 0$ del solido del problema 15.
Risp. $\frac{A}{K}\{\sqrt{kt/\pi}\,e^{-x^2/4kt} - \frac{1}{2}x \operatorname{erfc}(x/2\sqrt{kt})\}$

17. Un solido $0 \leqq x \leqq l$ è isolato alle due estremità $x = 0$ e $x = l$. Se la temperatura iniziale è data da $ax(l-x)$ dove a è una costante, determinare la temperatura di un generico punto x in un generico istante t.
Risp. $\frac{al^2}{6} - \frac{al^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-4kn^2\pi^2t/l^2}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{l}$

18. *(a)* Usare le trasformate di Laplace per risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0{,}25\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 1 \qquad 0 < x < 10,\; t > 0$$

$$U(10,t) = 20, \qquad U_x(0,t) = 0, \qquad U(x,0) = 50$$

(b) Interpretare questo problema in termini di conduzione del calore.

Risp. *(a)*
$$U(x,t) = 220 - 2x^2 + \frac{6400}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/1600}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$
$$- \frac{120}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2t/1600}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

19. *(a)* Risolvere

$$2\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad x > 0,\; t > 0$$

$$U_x(0,t) = 0, \qquad U(x,0) = e^{-x}, \qquad U(x,t) \text{ è limitata}$$

(b) Interpretare questo problema in termini di conduzione di calore.

Risp. $U(x,t) = e^{t-x} - \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-v^2 - x^2/4v^2}\,dv$

20. *(a)* Un solido semi-infinito $x > 0$ ha la faccia $x = 0$ mantenuta a temperatura $U_0 \cos\omega t$, $t > 0$. Se la temperatura iniziale è ovunque zero, dimostrare che la temperatura del generico punto $x > 0$ nell'istante generico $t > 0$ è

$$U(x,t) = U_0\,e^{-\sqrt{\omega/2k}\,x}\cos(\omega t - \sqrt{\omega/2k}\,x) - \frac{U_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{ue^{-ut}\sin x\sqrt{u/k}}{u^2+\omega^2}\,du$$

(b) Dimostrare che per valori elevati di t, l'integrale che figura nel risultato della parte *(a)* è trascurabile.

21. Un solido semi-infinito $x \geqq 0$ è inizialmente a temperatura zero. Nell'istante $t = 0$ la faccia $x = 0$ è portata istantaneamente alla temperatura T_0 e mantenuta a tale temperatura per un tempo t_0, dopo di che la temperatura è ridotta istantaneamente a zero. Dimostrare che, passato un altro intervallo t_0, la temperatura presenta un massimo ad una distanza data da $x = 2\sqrt{kt_0 \ln 2}$ dove k è la diffusività, assunta costante.

22. Nell'istante $t = 0$ si applica alla faccia $x = 0$ di un solido semi-infinito $x > 0$ che è a temperatura zero, un flusso sinusoidale di calore tale che $-K\,U_x(0,t) = A + B\sin\omega t$, $t > 0$. Dimostrare che la temperatura della faccia stessa per ogni istante successivo è data da

$$\frac{2\sqrt{k}\,A}{K\sqrt{\pi}}t^{1/2} + \frac{2B\sqrt{k}\,\omega}{K}\left\{\left(\int_0^{\sqrt{t}}\cos\omega v^2\,dv\right)\sin\omega t - \left(\int_0^{\sqrt{t}}\sin\omega v^2\,dv\right)\cos\omega t\right\}$$

23. Determinare la temperatura del solido del problema 22 per ogni $x > 0$.

CORDA VIBRANTE

24. *(a)* Risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad 0 < x < \pi,\; t > 0$$

$$Y_x(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = h, \quad Y(x,0) = 0, \quad Y_t(x,0) = 0$$

(b) Dare una interpretazione fisica del problema in *(a)*.

Risp. $Y(x,t) = \frac{8h}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\sin(n-\frac{1}{2})x\,\sin(2n-1)t$

25. Risolvere il problema dei valori al contorno

$$Y_{tt} = Y_{xx} + g \qquad 0 < x < \pi,\; t > 0$$

$$Y(0,t) = 0, \quad Y(\pi,t) = 0, \quad Y(x,0) = \mu x(\pi - x), \quad Y_t(x,0) = 0$$

e darne una interpretazione fisica.

Risp. $Y(x,t) = \frac{1}{2}gx(\pi - x) + \frac{4(2\mu x - g)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\cos(2n-1)t$

26. Una corda flessibile ben tesa ha le estremità fissate in $x = 0$ e $x = l$. Nell'istante $t = 0$ il suo punto mediano viene spostato alla distanza h e poi lasciato libero. Determinare lo spostamento risultante per ogni istante $t > 0$.

Risp. $Y(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cos\frac{(2n-1)\pi at}{l}$

27. *(a)* Risolvere

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\; t > 0$$

$$Y_x(0,t) = A\sin\omega t, \qquad Y(x,0) = 0, \qquad Y_t(x,0) = 0$$

(b) Dare una interpretazione fisica del problema.

Risp. *(a)* $Y(x,t) = \frac{Aa}{\omega}\{\cos\omega(t - x/a) - 1\}$ se $t > x/a$ e 0 se $t \leqq x/a$

VIBRAZIONI NELLE TRAVI

28. Una trave lunga l ha l'estremità $x = 0$ incastrata e l'estremità $x = l$ libera. La sua estremità $x = l$ viene spostata di colpo longitudinalmente ad una distanza α e poi lasciata libera. Dimostrare che lo spostamento risultante per ogni x e t è dato da

$$Y(x,t) = \frac{\alpha x}{l} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi ct}{l}$$

29. Una trave è incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = l$. Nell'istante $t = 0$ la trave viene percossa in modo da imprimerle una velocità trasversale $V_0 \sin \pi x/l$. Determinare lo spostamento trasversale per ogni valore x e di t.

30. Risolvere il problema 29 nel caso la velocità trasversale sia $V_0 x(l - x)$.

31. Una trave di lunghezza l è incernierata alle estremità. Dimostrare che le sue frequenze naturali di oscillazione trasversale siano date da

$$f_n = \frac{n^2\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{EIg}{\rho}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

32. Una trave elastica semi-infinita si sposta per il lungo alla velocità $-v_0$. All'improvviso una delle due estremità è arrestata mentre l'altra resta libera. (*a*) Spiegare in relazione al caso illustrato ognuno degli elementi del problema dato in (*b*) e (*b*) risolvere il problema dei valori al contorno.

$$Y_{tt}(x, t) = a^2 Y_{xx}(x, t) \qquad x > 0, \; t > 0$$

$$Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = -v_0, \quad Y(0, t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} Y_x(x, t) = 0$$

Risp. (*b*) $Y(x, t) = -v_0 x/a$ se $t > x/a$ e $-v_0 t$ se $t \leqq x/a$

LINEE DI TRASMISSIONE

33. Una linea di trasmissione semi-infinita di induttanza e conduttanza per unità di lunghezza trascurabili ha tensione e corrente eguale a zero. Nell'istante $t = 0$ alla estremità emittente $x = 0$ viene applicata la tensione costante E_0. (*a*) Dimostrare che la tensione per ogni $x > 0$ e $t > 0$ è data da

$$E(x, t) = E_0 \operatorname{erfc}(x\sqrt{RC}/2\sqrt{t})$$

e (*b*) che la corrente corrispondente è

$$I(x, t) = \frac{E_0 x}{2\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{C}{R}}\, t^{-3/2}\, e^{-RCx^2/4t}$$

34. Dimostrare che nel caso del problema 33 la corrente ha in ogni istante un massimo nella posizione a distanza $\sqrt{2t/RC}$ dalla estremità ricevente.

35. Una linea di trasmissione semi-infinita ha resistenza e conduttanza per unità di lunghezza trascurabili e la sua tensione e corrente iniziali sono nulle. Nell'istante $t = 0$ alla estremità emittente $x = 0$ viene applicata una tensione $E_0(t)$.

(*a*) Dimostrare che la tensione è, per ogni $x > 0$

$$E(x, t) = \begin{cases} E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

e (*b*) che la corrente corrispondente è

$$I(x, t) = \begin{cases} \sqrt{C/L}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

36. Si supponga che la linea di trasmissione di cui al problema 35 sia tale che $R/L = G/C$. Dimostrare che il voltaggio è dato da

$$E(x, t) = \begin{cases} e^{-x\sqrt{RG}}\, E_0(t - x\sqrt{LC}) & t > x\sqrt{LC} \\ 0 & t < x\sqrt{LC} \end{cases}$$

e confrontare il risultato con quello ottenuto nel problema 35. Qual è in tale caso la corrente?

37. (*a*) Una linea di trasmissione di resistenza e conduttanza trascurabili ha la estremità emittente in $x = 0$ e quella ricevente in $x = l$. Alla estremità emittente è applicata una tensione costante, mentre alla estremità ricevente è collegato un circuito aperto per cui in esso la corrente è zero. Supponendo che la tensione e la corrente iniziali siano nulli, dimostrare che per ogni posizione x e per ogni $t > 0$ la tensione e la corrente sono dati da

$$E(x, t) = \frac{E_0 \cosh\sqrt{L/C}\,(l - x)}{\cosh\sqrt{L/C}\, l}$$

$$I(x, t) = \frac{E_0\sqrt{L/C}\sinh\sqrt{L/C}\,(l - x)}{\cosh\sqrt{L/C}}$$

(*b*) Discutere il significato del fatto che la tensione e la corrente in (*a*) sono indipendenti dal tempo.

38. (*a*) Risolvere il problema 37 nel caso la linea descritta nel problema 37 abbia resistenza e capacità trascurabili ma induttanza e conduttanza non trascurabili, dimostrando che in questo caso

$$E(x, t) = E_0\left\{1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2l\sqrt{LC}}\right\}$$

(*b*) Qual è la corrente in questo caso? Discutere la convergenza della serie ottenuta e spiegarne il significato.

PROBLEMI VARI

39. (*a*) Risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x \qquad 0 < x < 1, \; t > 0$$

$$U(0, t) = 0, \quad U(1, t) = 0, \quad U(x, 0) = x - x^2$$

(*b*) Dare una interpretazione fisica del problema della parte (*a*).

Risp. $U(x, t) = x(1 - x) - \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 - e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\right)\sin n\pi x$ o $U(x, t) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2\pi^2 t}}{n^3}\sin n\pi x$

40. Risolvere il problema 39 se alla condizione $U(0, t) = 0$ si sostituisce la condizione $U_x(0, t) = 0$.

Risp.
$$U(x, t) = \frac{5}{3} - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$
$$- \frac{64}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4}}{(2n-1)^4}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

41. Un solido $0 < x < l$, inizialmente è a temperatura zero. Alla faccia $x = 0$ è applicata una temperatura $U(0, t) = G(t)$, $t > 0$, mentre la faccia $x = l$ è mantenuta a 0 °C. Dimostrare che la temperatura è data per ogni valore di x e t da

$$U(x, t) = \frac{2\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{n\int_0^t e^{-n^2\pi^2 u/l^2}G(t - u)\,du\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

42. Risolvere il problema 41 assumendo che la faccia $x = l$ sia isolata.

43. Dimostrare che la risoluzione di un problema dei valori al contorno che comporta l'equazione $\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ equivale a risolvere il problema sostituendovi l'equazione $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ e ponendo poi kt al posto di t.

44. Un solido, $0 < x < l$, ha le temperature alle estremità mantenute a zero mentre la temperatura iniziale è $F(x)$. Dimostrare che la temperatura è per ogni valore di x e di t

$$U(x, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kn^2\pi^2 t/l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l F(u)\sin\frac{n\pi u}{l}\,du$$

45. Determinare la soluzione limitata di

$$x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} = xe^{-y} \qquad 0 < x < 1, \; y > 0$$

che soddisfa alle condizioni $\Phi(x, 0) = x$, $0 < x < 1$.

Risp. $\Phi(x, y) = xe^{-y}(1 + y)$

46. Una corda tesa tra $x = 0$ e $x = l$ è tirata nel suo punto mediano ad una distanza D e poi lasciata andare. Determinare lo spostamento risultante per ogni valore di x e t rispetto alla posizione di equilibrio.

Risp. $$Y(x,t) = \frac{8D}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi a t}{l}$$

47. Dimostrare che il problema della linea di trasmissione con induttanza e conduttanza per unità di lunghezza trascurabili equivale ad un problema di conduzione del calore.

48. Risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + x\frac{\partial Y}{\partial x} + Y = x \qquad x > 0,\ t > 0$$

dove $Y(0,t) = 0,\ Y(x,0) = 0.$ *Risp.* $Y(x,t) = \frac{1}{2}x(1 - e^{-2t})$

49. Dimostrare che la risoluzione di un problema dei valori al contorno che comporta l'equazione $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ equivale a risolvere il problema sostituendo questa equazione con l'equazione $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ e sostituendo poi at a t.

50. Dimostrare che il problema della linea di trasmissione con resistenza e conduttanza trascurabili equivale ad un problema della corda vibrante.

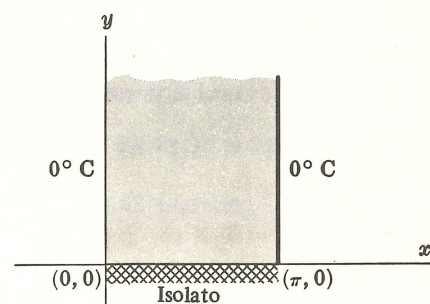
51. Una corda è tesa tra i punti $x = 0$ e $x = l$. All'estremità $x = 0$ viene impresso un movimento trasversale dato da $Y(0,t) = F(t)$ dove $F(t)$ è una data funzione del tempo, mentre l'estremità $x = l$ resta ferma. Determinare lo spostamento trasversale della corda.

52. Una lastra semi-infinita larga π (v. fig. 8-14) è isolata sulle facce. Gli spigoli semi-infiniti sono mantenuti a 0 °C, mentre lo spigolo finito è isolato. Se la temperatura iniziale della piastra è 100 °C, determinare la temperatura di ogni punto in funzione del tempo.

Fig. 8-14

53. Un solido $0 < x < l$, inizialmente si trova a temperatura costante U_0 mentre le estremità $x = 0$ e $x = l$ sono mantenute a temperatura zero. Dimostrare che la temperatura è data, per ogni valore di x e di t, da

$$U(x,t) = U_0\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{\mathrm{erf}\left(\frac{nl-x}{2\sqrt{kt}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{nl+x}{2\sqrt{kt}}\right)\right\}$$

54. Una trave è incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = l$. Nell'istante $t = 0$ un carico di grandezza w è applicato istantaneamente nella sua mezzeria. Dimostrare che lo spostamento trasversale della trave che ne risulta è dato, per ogni punto x e per ogni $t > 0$, da

$$Y(x,t) = \frac{wx}{12EI}\left(\tfrac{3}{4}l^2 - x^2\right) - \frac{2wl^3}{\pi^4 EI}\left\{\frac{\sin \pi x/l}{1^4} + \frac{\sin 3\pi x/l}{3^4} + \frac{\sin 5\pi x/l}{5^4} + \cdots\right\}$$

se $0 < x < l/2$, mentre il risultato corrispondente per $l/2 < x < l$ si ottiene per simmetria.

55. Dimostrare che il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U \qquad 0 < x < l,\ t > 0$$

$$U(0,t) = U_1, \qquad U(l,t) = U_2, \qquad U(x,0) = 0$$

ammette la soluzione

$$U(x,t) = \frac{U_1\sinh\alpha(l-x) + U_2\sinh\alpha x}{\sinh\alpha l} + \frac{2\pi}{l^2}e^{-\alpha^2 t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,e^{-n^2\pi^2 t/l^2}(U_2\cos n\pi - U_1)}{\alpha^2 + n^2\pi^2/l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

56. Dimostrare che il problema 55 può essere interpretato come un problema di trasmissione del calore relativo da un'asta lunga l che può irraggiare calore nell'ambiente.

57. Ad una trave incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = \pi$ è applicato un carico distribuito di valore $F(x) = x(\pi - x)$. Se per $t = 0$ lo spostamento e la velocità di spostamento della trave sono nulli, determinare il suo spostamento trasversale in funzione del tempo.

58. A una linea di trasmissione semi-infinita di induttanza e conduttanza per unità di lunghezza trascurabili, è applicata, all'estremità emittente $x = 0$, una tensione data da $E(0,t) = E_0\cos\omega t$, $t > 0$. Supponendo che la tensione e la corrente iniziale siano zero, (*a*) dimostrare che dopo un lungo tempo la tensione per ogni $x > 0$ è data da

$$E(x,t) = E_0\,e^{-\sqrt{\omega RC/2}\,x}\cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x)$$

e (*b*) che la corrente corrispondente è data da

$$I(x,t) = E_0\sqrt{\omega C/R}\,e^{-\sqrt{\omega RC/2}}\cos(\omega t - \sqrt{\omega RC/2}\,x - \pi/4)$$

59. Una corda semi-infinita inizialmente è in quiete sull'asse x e la sua estremità $x = 0$ è fissata. Nell'istante $t = 0$ ad ogni punto x della corda viene impressa una velocità data da $F(x)$, $x > 0$. Determinare lo spostamento che ne risulta in funzione di x e di $t > 0$.

60. Alla mezzeria di una trave incernierata alle estremità $x = 0$ e $x = l$ è applicata una forza trasversale concentrata $F = F_0\sin\omega t$, $t > 0$. Dimostrare che lo spostamento trasversale che ne risulta è dato da

$$Y(x,t) = \frac{bF_0\sin\omega t}{4EI}\sqrt{\frac{b}{\omega}}\left\{\frac{\sin x\sqrt{\omega/b}}{\cos l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}} - \frac{\sinh x\sqrt{\omega/b}}{\cosh l\sqrt{\omega}/2\sqrt{b}}\right\}$$

$$- \frac{2bF_0 l}{\pi^2 EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi/2}{n^2(\omega^2 - b^2n^4\pi^4/l^2)}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{bn^2\pi^2 t}{l^2}$$

se $0 < x < l/2$, con un risultato ottenuto per simmetria per $l/2 < x < l$. Discutere il significato fisico del fatto di avere $\omega = bn^2\pi^2/l^2$ per alcuni valori di $n = 1, 2, 3, \ldots$.

61. Determinare la temperatura di regime nel quadrato indicato in fig. 8-15 nell'ipotesi che le facce piane siano isolate e che i lati siano mantenuti alle temperature indicate in figura.

Risp. $$U(x,y) = \frac{4T}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x\,\sinh(2n-1)\pi(1-y)}{(2n-1)\sinh(2n-1)\pi}$$

62. Risolvere il problema 62 con l'ipotesi che tutti i lati siano mantenuti a temperature costanti T_1, T_2, T_3, T_4.

63. Si supponga che nel problema 62 la temperatura iniziale sia 0 °C. Quale sarebbe la temperatura risultante per ogni punto in funzione del tempo?

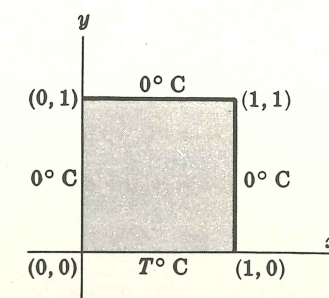



Fig. 8-15

64. Una trave lunga l è incastrata all'estremità $x = l$. Nell'istante $t = 0$ all'estremità $x = 0$ viene impresso uno spostamento longitudinale D e quindi viene lasciata libera. Dimostrare che lo spostamento longitudinale di ogni punto x per ogni $t > 0$ è dato da

$$Y(x,t) = D\left\{u(t - x/a) - u\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + u\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) - \cdots\right\}$$

dove u è la funzione a scalino unitario di Heaviside. Discutere graficamente questa soluzione.

65. Due solidi conduttori semi-infiniti $x < 0$ e $x > 0$ (v. fig. 8-16) hanno conduttività e diffusività termiche costanti date rispettivamente da K_1, k_1 e K_2, k_2. Le temperature iniziali di questi solidi sono costanti ed eguali rispettivamente a U_1 e U_2. Dimostrare che la temperatura di un qualsiasi punto del solido $x > 0$ per ogni valore di t è data da

$$U(x, t) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{1 + \alpha}\left\{1 + \alpha \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{k_2 t}}\right)\right\}$$

dove $\alpha = K_1\sqrt{k_2}/K_2\sqrt{k_1}$.

[*Suggerimento.* Le equazioni di trasmissione del calore sono

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad x > 0$$

e si deve avere $\lim_{x \to 0-} U(x, t) = \lim_{x \to 0+} U(x, t)$ e $\lim_{x \to 0-} K_1 U_x(x, t) = \lim_{x \to 0+} K_2 U_x(x, t)$.]

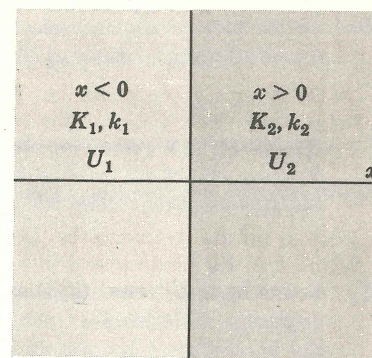



Fig. 8-16

66. Verificare il risultato ottenuto nel problema 8, pag. 228.

67. Un cilindro circolare infinito di raggio unitario si trova inizialmente a temperatura zero. Alla superficie convessa è applicato un flusso termico costante A. Dimostrare che la temperatura dei punti distanti r dall'asse è data per ogni t da

$$U(r, t) = \frac{A}{4k}\{1 - 8kt - 2r^2\} + \frac{2A}{k}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\lambda_n^2 t}\frac{J_0(\lambda_n r)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}$$

dove λ_n sono le radici positive di $J_0(\lambda) = 0$.

68. Un cilindro di raggio e altezza unitaria ha le superfici circolari mantenute a temperatura zero, mentre la superficie convessa è mantenuta a temperatura U_0. Supponendo che l'asse del cilindro coincida con l'asse z, dimostrare che la temperatura di regime è data, per ogni distanza r dall'asse e z da una delle basi, da

$$U(r, z) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi z}{2n-1}\frac{I_0\{(2n-1)\pi r\}}{I_0\{(2n-1)\pi\}}$$

69. (*a*) Risolvere il problema dei valori al contorno

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + b^2\frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = 0 \qquad 0 < x < l, \; t > 0$$

$$Y(0, t) = 0, \quad Y(l, t) = 0, \quad Y(x, 0) = 0, \quad Y_t(x, 0) = 0, \quad Y_{xx}(l, t) = 0, \quad EI\,Y_{xx}(0, t) = P_0 \sin \omega t$$

(*b*) Interpretare fisicamente il problema dato in (*a*).

Risp. (*a*)

$$Y(x, t) = \frac{bP_0 \sin \omega t}{2EI\omega}\left\{\frac{\sinh(l - x)\sqrt{\omega/b}}{\sinh l\sqrt{\omega/b}} - \frac{\sin(l - x)\sqrt{\omega/b}}{\sin l\sqrt{\omega/b}}\right\}$$

$$+ \frac{2\omega P_0 b}{\pi EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x/l \, \sin bn^2\pi^2 t/l^2}{n(\omega^2 - b^2 n^4 \pi^4/l^4)}$$

70. Una linea di trasmissione semi-infinita di induttanza trascurabile ha inizialmente tensione e corrente nulle. Nell'istante $t = 0$ alle estremità emittente $x = 0$ viene applicata una tensione E_0 costante. Dimostrare che la tensione è data per ogni $x > 0$ e $t > 0$ da

$$E(x, t) = \tfrac{1}{2}E_0\left\{e^{-x\sqrt{GR}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right) - e^{x\sqrt{GR}}\operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{Gt}{C}} + \tfrac{1}{2}x\sqrt{\frac{RC}{t}}\right)\right\} - E_0 \cosh x\sqrt{GR}$$

Qual è la corrente corrispondente?

APPENDICE A

TABELLA DELLE PROPRIETA' GENERALI DELLE TRASFORMATE DI LAPLACE

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt$$

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
2.	$f(s/a)$	$a F(at)$
3.	$f(s - a)$	$e^{at} F(t)$
4.	$e^{-as} f(s)$	$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} F(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
5.	$s f(s) - F(0)$	$F'(t)$
6.	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
7.	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \cdots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
8.	$f'(s)$	$-t F(t)$
9.	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
10.	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
11.	$\frac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)\,du$
12.	$\frac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \cdots \int_0^t F(u)\,du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u)\,du$
13.	$f(s)\,g(s)$	$\int_0^t F(u)\,G(t-u)\,du$

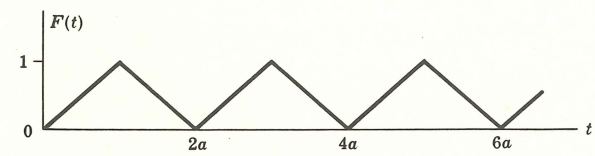
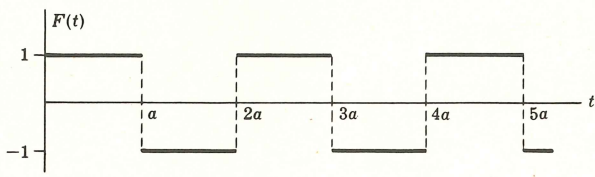
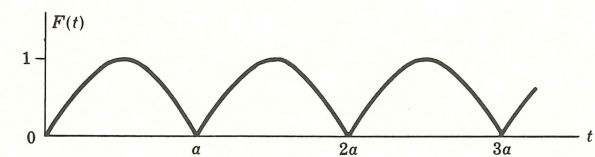
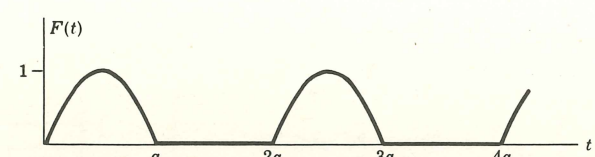
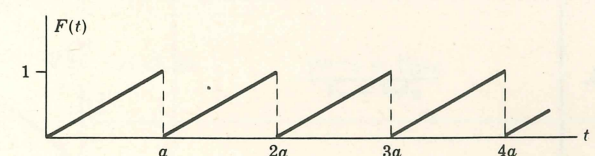
	$f(s)$	$F(t)$
14.	$\int_s^\infty f(u)\,du$	$\frac{F(t)}{t}$
15.	$\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t) = F(t+T)$
16.	$\frac{f(\sqrt{s})}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
17.	$\frac{1}{s}f(1/s)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
18.	$\frac{1}{s^{n+1}}f(1/s)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})\,F(u)\,du$
19.	$\frac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})\,F(u)\,du$
20.	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
21.	$\frac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \frac{t^u F(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$
22.	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s) =$ polinomio di grado minore di n $Q(s) = (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n)$ dove $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sono tutte distinte	$\sum_{k=1}^{n}\frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}e^{\alpha_k t}$

APPENDICE B

TABELLA DI ALCUNE TRASFORMATE DI LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^2}$	t
3.	$\frac{1}{s^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, $\quad 0! = 1$
4.	$\frac{1}{s^n}$ $\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
5.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
6.	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $\quad n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$, $\quad 0! = 1$
7.	$\frac{1}{(s-a)^n}$ $\quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
8.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
9.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
10.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$
11.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
12.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh at}{a}$
13.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
14.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\sinh at}{a}$

	$f(s)$	$F(t)$
15.	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
16.	$\frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
17.	$\frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
18.	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
19.	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t\sin at}{2a}$
20.	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{\sin at + at\cos at}{2a}$
21.	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$
22.	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
23.	$\frac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{at\cosh at - \sinh at}{2a^3}$
24.	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t\sinh at}{2a}$
25.	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{\sinh at + at\cosh at}{2a}$
26.	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$
27.	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cosh at$
28.	$\frac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$
29.	$\frac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
30.	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$
31.	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{3t\sin at + at^2\cos at}{8a}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.	$\frac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$
33.	$\frac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\sin at}{8}$
34.	$\frac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{t^2\sin at}{2a}$
35.	$\frac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
36.	$\frac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
37.	$\frac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{t^3\sin at}{24a}$
38.	$\frac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{(3+a^2t^2)\sinh at - 3at\cosh at}{8a^5}$
39.	$\frac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{at^2\cosh at - t\sinh at}{8a^3}$
40.	$\frac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{at\cosh at + (a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$
41.	$\frac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{3t\sinh at + at^2\cosh at}{8a}$
42.	$\frac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{(3+a^2t^2)\sinh at + 5at\cosh at}{8a}$
43.	$\frac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{(8+a^2t^2)\cosh at + 7at\sinh at}{8}$
44.	$\frac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{t^2\sinh at}{2a}$
45.	$\frac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
46.	$\frac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
47.	$\frac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{t^3\sinh at}{24a}$
48.	$\frac{1}{s^3+a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2} - \cos\frac{\sqrt{3}at}{2} + e^{-3at/2}\right\}$

	$f(s)$	$F(t)$
49.	$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
50.	$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
51.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
52.	$\dfrac{s}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
53.	$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
54.	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at)$
55.	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
56.	$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\sin at\cosh at+\cos at\sinh at)$
57.	$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
58.	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$
59.	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
60.	$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}(\sinh at+\sin at)$
61.	$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
62.	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
63.	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
64.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}\,(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\operatorname{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
65.	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-b\,e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$

	$f(s)$	$F(t)$
66.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
67.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
68.	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}\quad n>-1$	$a^n J_n(at)$
69.	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}}\quad n>-1$	$a^n I_n(at)$
70.	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
71.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases}J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t>b\\ 0 & t<b\end{cases}$
72.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{t\,J_1(at)}{a}$
73.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$t\,J_0(at)$
74.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at)-at\,J_1(at)$
75.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{t\,I_1(at)}{a}$
76.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$t\,I_0(at)$
77.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at)+at\,I_1(at)$
78.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ v. anche caso 141, pag. 254.	$F(t)=n,\quad n\leqq t<n+1,\ n=0,1,2,\ldots$
79.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$ dove $[t]$ = massimo numero intero $\leqq t$
80.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ v. anche caso 143, pag. 254.	$F(t)=r^n,\quad n\leqq t<n+1,\ n=0,1,2,\ldots$
81.	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

	$f(s)$	$F(t)$
82.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
83.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
84.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
85.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-a^2/4t}$
86.	$\dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
87.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
88.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
89.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\, a^{2n+1}} \displaystyle\int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
90.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
91.	$\dfrac{\ln \|(s^2+a^2)/a^2\|}{2s}$	$\operatorname{Ci}(at)$
92.	$\dfrac{\ln \|(s+a)/a\|}{s}$	$\operatorname{Ei}(at)$
93.	$-\dfrac{(\gamma + \ln s)}{s}$ γ = costante di Eulero = 0,5772156...	$\ln t$
94.	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
95.	$\dfrac{\pi^2}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ γ = costante di Eulero = 0,5772156...	$\ln^2 t$
96.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ γ = costante di Eulero = 0,5772156...
97.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ γ = costante di Eulero = 0,5772156...

	$f(s)$	$F(t)$
98.	$\dfrac{\Gamma'(n+1) - \Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$t^n \ln t$
99.	$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\sin at}{t}$
100.	$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$\operatorname{Si}(at)$
101.	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}} \operatorname{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
102.	$e^{s^2/4a^2} \operatorname{erfc}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}\, e^{-a^2t^2}$
103.	$\dfrac{e^{s^2/4a^2} \operatorname{erfc}(s/2a)}{s}$	$\operatorname{erf}(at)$
104.	$\dfrac{e^{as} \operatorname{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
105.	$e^{as} \operatorname{Ei}(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
106.	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as \left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} - \sin as \operatorname{Ci}(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
107.	$\sin as \left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ci}(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
108.	$\dfrac{\cos as \left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} - \sin as \operatorname{Ci}(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
109.	$\dfrac{\sin as \left\{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right\} + \cos as \operatorname{Ci}(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
110.	$\left[\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Si}(as)\right]^2 + \operatorname{Ci}^2(as)$	$\dfrac{1}{t} \ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
111.	0	$\mathcal{N}(t)$
112.	1	$\delta(t)$
113.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
114.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ v. anche caso 139, pag. 254.	$\mathcal{U}(t-a)$

	$f(s)$	$F(t)$
115.	$\dfrac{\sinh sx}{s \sinh sa}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \sin \dfrac{n\pi x}{a} \cos \dfrac{n\pi t}{a}$
116.	$\dfrac{\sinh sx}{s \cosh sa}$	$\dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
117.	$\dfrac{\cosh sx}{s \sinh sa}$	$\dfrac{t}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
118.	$\dfrac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
119.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi t}{a}$
120.	$\dfrac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa}$	$x + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
121.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \sinh sa}$	$\dfrac{t^2}{2a} + \dfrac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a} \left(1 - \cos \dfrac{n\pi t}{a}\right)$
122.	$\dfrac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t + \dfrac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \sin \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
123.	$\dfrac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\frac{1}{2}(t^2 + x^2 - a^2) - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
124.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n\, e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
125.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)\, e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
126.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \cosh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \sin \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
127.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s} \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \cos \dfrac{n\pi x}{a}$
128.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} e^{-n^2\pi^2 t/a^2} \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
129.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s \cosh a\sqrt{s}}$	$1 + \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
130.	$\dfrac{\sinh x\sqrt{s}}{s^2 \sinh a\sqrt{s}}$	$\dfrac{xt}{a} + \dfrac{2a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3} (1 - e^{-n^2\pi^2 t/a^2}) \sin \dfrac{n\pi x}{a}$
131.	$\dfrac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2 \cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2}(x^2 - a^2) + t - \dfrac{16a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^3} e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2} \cos \dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$

	$f(s)$	$F(t)$
132.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s\, J_0(ia\sqrt{s})}$	$1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono le radici positive di $J_0(\lambda) = 0$
133.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2\, J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{1}{4}(x^2 - a^2) + t + 2a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2} J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono le radici positive di $J_0(\lambda) = 0$
134.	$\dfrac{1}{as^2} \tanh \left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Funzione d'onda triangolare**
135.	$\dfrac{1}{s} \tanh \left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Funzione d'onda quadrata**
136.	$\dfrac{\pi a}{a^2 s^2 + \pi^2} \coth \left(\dfrac{as}{2}\right)$	**Funzione sinusoidale raddrizzata a due alternanze**
137.	$\dfrac{\pi a}{(a^2 s^2 + \pi^2)(1 - e^{-as})}$	**Funzione sinusoidale raddrizzata a una alternanza**
138.	$\dfrac{1}{as^2} - \dfrac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}$	**Funzione d'onda a dente di sega**

	$f(s)$	$F(t)$
139.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ v. anche caso 114, pag. 251.	**Funzione unitaria di Heaviside** $\mathcal{U}(t-a)$
140.	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	**Funzione impulsiva**
141.	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ v. anche caso 78, pag. 249.	**Funzione a scalini**
142.	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2, \quad n \leqq t < n+1, \quad n = 0,1,2,\ldots$
143.	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ v. anche caso 80, pag. 249.	$F(t) = r^n, \quad n \leqq t < n+1, \quad n = 0,1,2,\ldots$
144.	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t > a \end{cases}$

APPENDICE C

TABELLA DI FUNZIONI PARTICOLARI

1. Funzione gamma

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u}\, du, \qquad n > 0$$

2. Funzione beta

$$B(m,n) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{n-1}\, du = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \qquad m, n > 0$$

3. Funzione di Bessel

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

4. Funzione di Bessel modificata

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n\,\Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\}$$

5. Funzione degli errori

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-u^2}\, du$$

6. Funzione complementare degli errori

$$\text{erfc}(t) = 1 - \text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^\infty e^{-u^2}\, du$$

7. Integralesponenziale

$$\text{Ei}(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\, du$$

8. Seno integrale

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$$

9. Coseno integrale

$$\text{Ci}(t) = \int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\, du$$

10. Seno integrale di Fresnel

$$S(t) = \int_0^t \sin u^2\, du$$

11. Coseno integrale di Fresnel

$$C(t) = \int_0^t \cos u^2\, du$$

12. Polinomi di Laguerre

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

Indice analitico

Finito di stampare nel mese di giugno 1993
da Grafica Pioltello - Pioltello (MI)
per conto della ETAS s.r.l.,
Via Mecenate, 89 - 20138 Milano

Volumi pubblicati:

1. Ayres, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE
2. Edminister, CIRCUITI ELETTRICI
3. Ayres, EQUAZIONI DIFFERENZIALI
4. Spiegel, STATISTICA (seconda edizione)
5. Rosenberg, CHIMICA GENERALE
6. Spiegel, MECCANICA RAZIONALE
7. Di Stefano-Stubberud-Williams, REGOLAZIONE AUTOMATICA
8. Spiegel, ANALISI MATEMATICA
9. Ayres, MATRICI
10. Spiegel, MANUALE DI MATEMATICA
11. Lowenberg, CIRCUITI ELETTRONICI
12. Mendelson, ALGEBRA DI BOOLE E CIRCUITI DI COMMUTAZIONE
13. Spiegel, ANALISI VETTORIALE
14. Scheid, ANALISI NUMERICA
15. Spiegel, VARIABILI COMPLESSE
16. Lipschutz, CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
17. Abbott-Van Ness, TERMODINAMICA
18. Lipschutz, ALGEBRA LINEARE (seconda edizione)
19. Hughes-Gaylord, EQUAZIONI PER L'INGEGNERIA
20. McLean-Nelson, MECCANICA APPLICATA
21. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 1
22. Seto, SISTEMI VIBRANTI
23. Stansfield, GENETICA (seconda edizione)
24. Giles, MECCANICA DEI FLUIDI E IDRAULICA
25. Tuma, ANALISI DELLE STRUTTURE
26. Spiegel, ANALISI DI FOURIER
27. Spiegel, TRASFORMATE DI LAPLACE
28. Nash, RESISTENZA DEI MATERIALI
29. Mase, MECCANICA DEI CONTINUI
30. Salvatore, MICROECONOMIA
31. Ayres, MATEMATICA GENERALE
32. Diulio, MACROECONOMIA
33. Van der Merwe, FISICA GENERALE
34. Hecht, OTTICA
35. Cashin-Lerner, RAGIONERIA 2
36. Seto, ACUSTICA
37. Hall-Holowenko-Laughlin, COSTRUZIONE DI MACCHINE
38. Hughes-Brighton, FLUIDODINAMICA
39. Lipschutz, TOPOLOGIA
40. Spiegel, PROBABILITÀ E STATISTICA
41. Metz, CHIMICA FISICA
42. Lipschutz, TEORIA DEGLI INSIEMI
43. Gottfried, PROGRAMMARE IN BASIC
44. Meislich-Nechamkin-Sharefkin, CHIMICA ORGANICA
45. Lipschutz-Poe, PROGRAMMARE IN FORTRAN
46. Ayres, ALGEBRA MODERNA
47. Spiegel, DIFFERENZE FINITE ED EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE
48. Edminister, ELETTROMAGNETISMO
49. Temes, COMUNICAZIONI ELETTRONICHE
50. Gautreau-Savin, FISICA MODERNA
51. Nasar, MACCHINE ELETTRICHE
52. Pitts-Sissom, TRASMISSIONE DEL CALORE
53. Beiser, SCIENZE DELLA TERRA
54. Lipschutz, ELABORAZIONE DEI DATI
55. Dowling, MATEMATICA PER ECONOMISTI
56. Gottfried, INTRODUZIONE AI CALCOLI DI INGEGNERIA
57. Baumslag-Chandler, TEORIA DEI GRUPPI
58. Bronson, MODERNA INTRODUZIONE ALLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI
59. Kaufman-Wilson, TECNOLOGIA ELETTRONICA
60. Bronson, RICERCA OPERATIVA
61. Lipschutz, MATEMATICA DI BASE PER IL CALCOLATORE
62. Wells, DINAMICA LAGRANGIANA
63. O'Malley, FONDAMENTI DI ANALISI DEI CIRCUITI
64. Lipschutz, GEOMETRIA DIFFERENZIALE
65. Scheid, IL CALCOLATORE E LA PROGRAMMAZIONE
66. Holtje, MARKETING
67. Tokheim, MICROPROCESSORI
68. Ullmann, METODI QUANTITATIVI NELLA GESTIONE AZIENDALE
69. Holtje, PUBBLICITÀ
70. Lipschutz, MATEMATICA DISCRETA
71. Salvatore, STATISTICA ED ECONOMETRIA
72. Kazmier, STATISTICA AZIENDALE
73. Orilia, INFORMATICA AZIENDALE
74. Newcomer, PROGRAMMARE IN COBOL STRUTTURATO
75. Gottfried, PROGRAMMARE IN PASCAL
76. Plastock-Kalley, COMPUTER GRAFICA
77. Monks, GESTIONE OPERATIVA DELL'IMPRESA
78. Spiegel, VARIABILI REALI
79. Beiser, SCIENZE FISICHE
80. Lipschutz, STRUTTURE DEI DATI
81. Goldberg-Jones-Sterbenz, PROGRAMMARE IN ASSEMBLY
82. Kuchel-Ralston, BIOCHIMICA
83. Bronson, OPERAZIONI SULLE MATRICI
84. Diulio, MONETA E BANCA
85. Cathey, DISPOSITIVI E CIRCUITI ELETTRONICI
86. Gottfried, PROGRAMMARE IN C

682317R

ISBN 88-453-0025-0

Lire 28.000